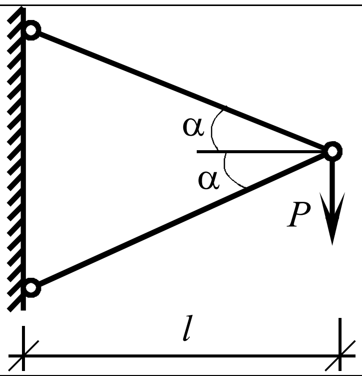
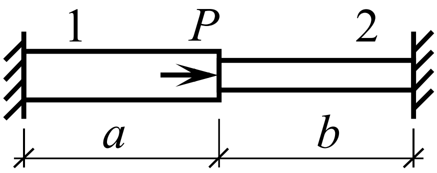
Олимпиада по сопротивлению материалов, I тур, СГУПС, 31 марта 2022г.

1



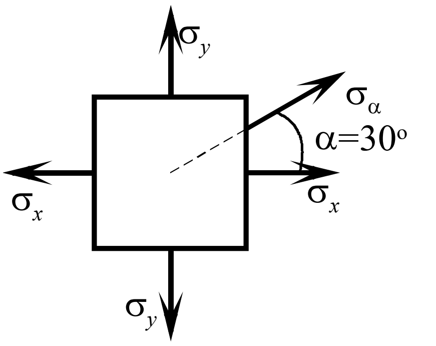
Кронштейн нагружен силой *P*, как показано на рисунке. Площади поперечных сечений стержней назначены по условию прочности. При каком угле α вес конструкции будет наименьшим?

2



При каком отношении a/b оба участка стержня будут равнопрочными?
Площади участков $A_1 = 2A_2$

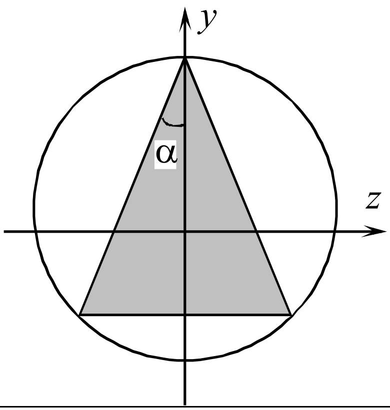
3



Относительное изменение объема элемента, находящегося в условиях плоского напряженного состояния равно θ. Найти напряжения σ_x и σ_y, если $\sigma_\alpha = 0$.

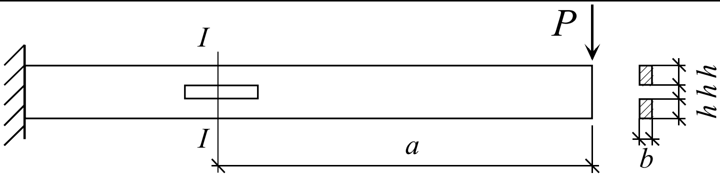
E, ν – заданы.

4



Из круга вырезан равнобедренный треугольник, как показано на рисунке. При каком угле α момент инерции треугольника относительно центральной оси Z будет максимальным?

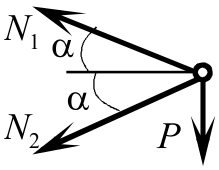
5



Консольная балка прямоугольного поперечного сечения нагружена силой P. В сечении I-I балка ослаблена прямоугольным вырезом. Построить эпюры нормальных и касательных напряжений в сечении I-I.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1



Запишем уравнения равновесия:

$\sum F_x = 0$ $\qquad N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\alpha = 0$ $\qquad -N_1 = N_2$

$\sum F_y = 0$ $\qquad N_1 \sin\alpha - N_2 \sin\alpha - P = 0$

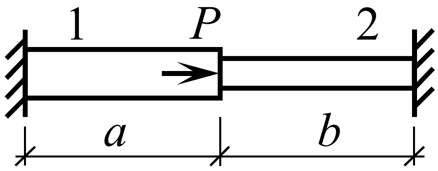
$N_1 = \frac{P}{2\sin\alpha}$ $\qquad N_2 = -\frac{P}{2\sin\alpha}$

Площади поперечного сечения стержней $A_1 = A_2 = \frac{P}{2R_y \sin\alpha}$, длины стержней $l_1 = l_2 = \frac{l}{\cos\alpha}$.

Объем всей системы $V = \frac{Pl}{R_y \sin\alpha \cos\alpha} = \frac{2Pl}{R_y \sin 2\alpha}$

Производная $\frac{dV}{d\alpha} = -\frac{2Pl}{R_y} \frac{2\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = 0$ $\qquad \cos 2\alpha = 0$ $\qquad \alpha = 45°$

Задача 2



При каком отношении a/b оба участка стержня будут равнопрочными?

Площади участков $A_1 = 2A_2$.

Решение.

Для равнопрочности участков необходимо, чтобы напряжения были одинаковыми по модулю: $\frac{N_1}{A_1} = -\frac{N_2}{A_2}$. (Очевидно, что участок 1 растянут, участок 2 сжат).

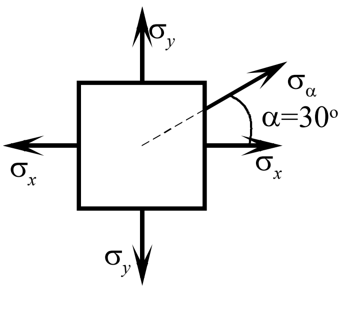
Из соотношения площадей следует, что $N_1 = -2N_2$. Кроме этого ясно, что «скачок» на эпюре продольных сил равен внешней силе *P*. Тогда $N_1 = \frac{2}{3}P$, а $N_1 = -\frac{1}{3}P$.

Деформационное уравнение $\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0$.

$\frac{2Pa}{3EA_1} - \frac{Pb}{3EA_2} = 0$, $\qquad \frac{2a}{A_1} - \frac{b}{A_2} = 0$, $\qquad \frac{2a}{2A_2} - \frac{b}{A_2} = 0$,

$a - b = 0$, $\qquad$ и окончательно $a = b$

Задача 3



Относительное изменение объема элемента, находящегося в условиях плоского напряженного состояния равно θ. Найти напряжения σ_x и σ_y, если $\sigma_\alpha = 0$.

E, ν – заданы.

Закон Гука (учитывая, что $\sigma_z = 0$): $\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$; $\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$;

$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(-\nu\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$.

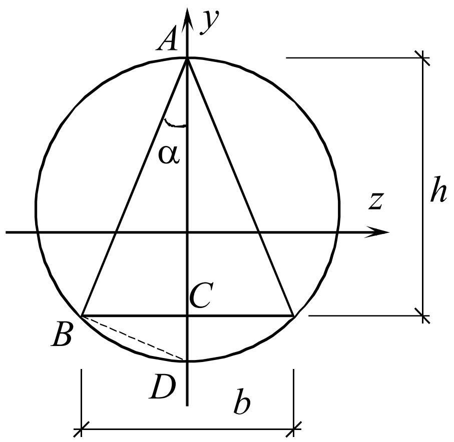
Относительное изменение объема $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$.

Второе условие $\sigma_\alpha = 0 = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha = \sigma_x \frac{3}{4} + \sigma_y \frac{1}{4}$

Имеем систему уравнений $\begin{cases} 3\sigma_x + \sigma_y = 0 \\ \sigma_x + \sigma_y = \dfrac{\theta E}{1-2\nu} \end{cases}$

Решая эту систему, найдем $\sigma_x = -\frac{\theta E}{2(1-2\nu)}$, $\sigma_y = +\frac{3\theta E}{2(1-2\nu)}$

Задача 4.



Из круга вырезан равнобедренный треугольник, как показано на рисунке. При каком угле α момент инерции треугольника относительно центральной оси Z будет максимальным?

.

Решение

Из треугольника *ABD* найдем сторону *AB*

$AB = d\cos\alpha$ (d – диаметр окружности)

Далее из треугольника *ABC* найдем

$h = AC = AB\cos\alpha = d\cos^2\alpha$

$b = 2BC = 2AB\sin\alpha = 2d\cos\alpha\sin\alpha$

Момент инерции

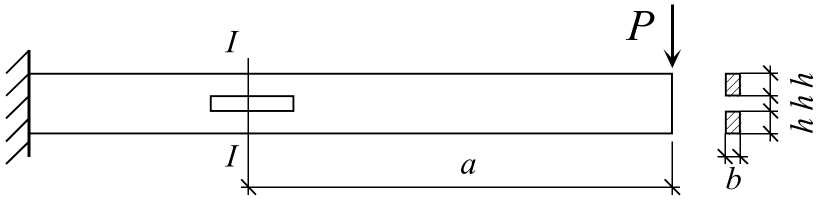
$$J_z = \frac{bh^3}{36} = \frac{2d^4}{36}\cos^7\alpha\sin\alpha$$

Производная

$$\frac{2d^4}{36}\left(-7\cos^6\alpha\sin^2\alpha + \cos^8\alpha\right) = 0$$

$$-7\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0; \qquad -7\,\mathrm{tg}^2\alpha = -1; \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

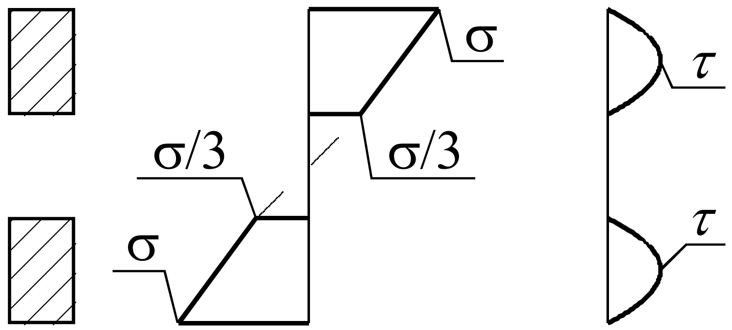
Задача 5



Консольная балка прямоугольного поперечного сечения нагружена силой *P*. В сечении *I-I* балка ослаблена прямоугольным вырезом. Построить эпюры нормальных и касательных напряжений в сечении *I-I*.

Решение.

Эпюры показаны на рисунке.



Момент сопротивления в ослабленном сечении

$$W = \left(2\left(\frac{bh^3}{12} + bhh^2\right)\right)\frac{1}{1.5h} = \frac{13}{9}bh^2$$

Нормальные напряжения в сечении

$$\sigma = \frac{9Pa}{13bh^2}$$

Касательные напряжения

$$\tau = \frac{P}{2bh}\frac{3}{2} = \frac{3P}{4bh}$$