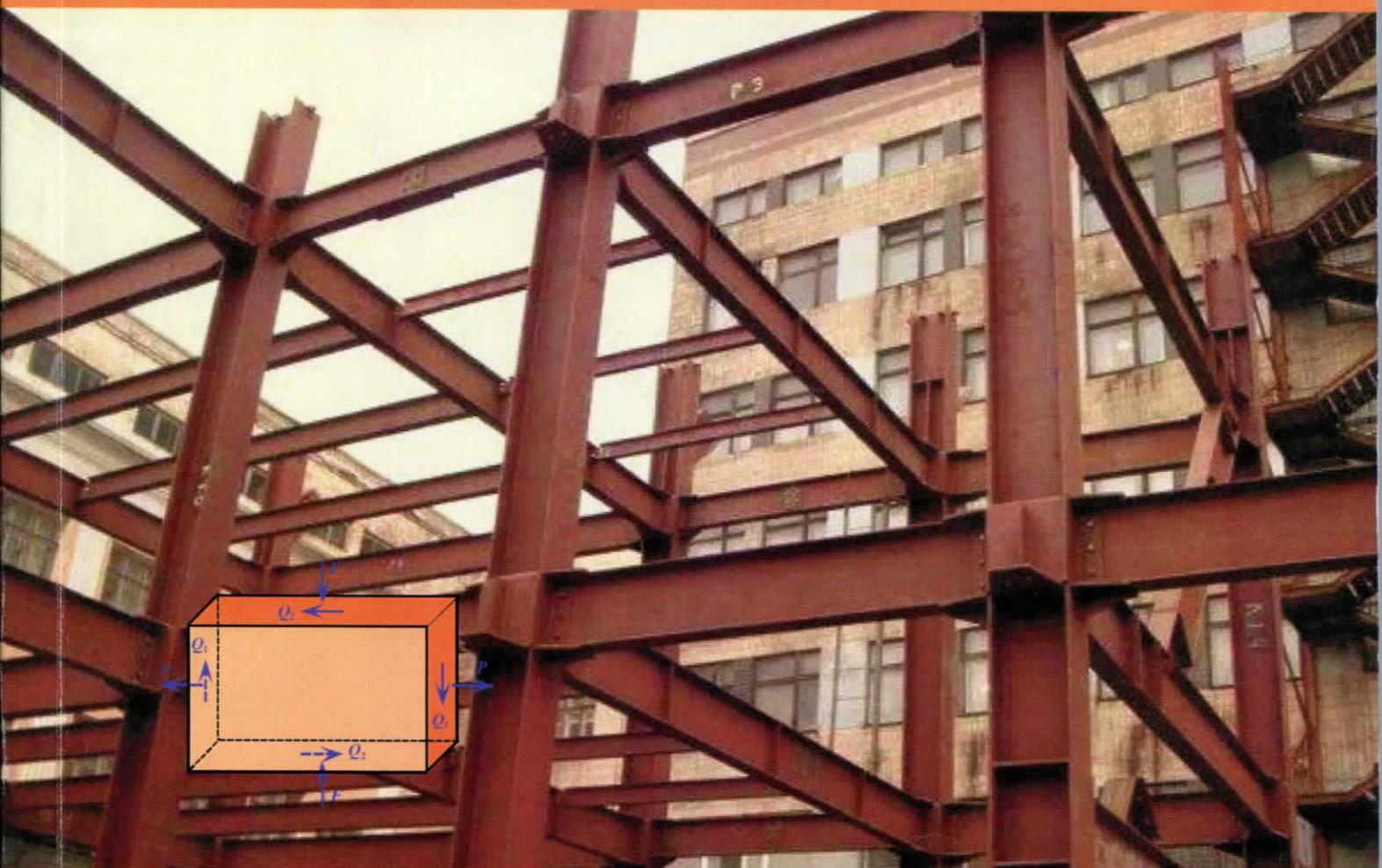


Сборник

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Сборник задач и примеры решений

Часть I



Новосибирск
2013

УДК 539.8

ББК 30.121

C232

Агуленко, В. Н.

C232 Сопротивление материалов : сборник задач / В. Н. Агуленко, В. П. Кутовой, Е. Б. Маслов, В. М. Тихомиров, А. П. Шабанов. – Новосибирск : Изд-во СГУПСа, 2013. Ч. I. – 84 с.

ISBN 978-5-93461-603-9

ISBN 978-5-93461-618-3 (Ч. 1)

В сборнике приведены условия и расчетные схемы задач, указания по выбору исходных данных, индивидуальных для каждого студента; рассмотрены примеры решения задач и оформления расчетов; приведены таблицы сортамента стального проката и список необходимой литературы.

Предназначен для самостоятельной работы студентов заочного факультета по дисциплинам «Сопротивление материалов» и «Прикладная механика».

УДК 539.8

ББК 30.121

Утвержден к изданию редакционно-издательским советом университета.

Ответственный редактор
д-р техн. наук, проф. *В.М. Тихомиров*

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра «Сопротивление материалов и ПТМ» Новосибирской государственной академии водного транспорта (завкафедрой канд. техн. наук, доц. *Ю.И. Ришко*)

завкафедрой «Строительная механика» Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета д-р техн. наук, проф. *Г.И. Гребенюк*

ISBN 978-5-93461-603-9

ISBN 978-5-93461-618-3 (Ч. 1)

© Сибирский государственный университет
путей сообщения, 2013

© Агуленко В.Н., Кутовой В.П., Маслов Е.Б.,
Тихомиров В.М., Шабанов А.П., 2013

Указания к выполнению и оформлению контрольных работ

Контрольные работы выполняются в соответствии со своей специальностью.

Специальность	Номера задач	
	Контрольная работа № 1	Контрольная работа № 2
Строительство железных дорог, мостов и транспортных тоннелей	1, 3, 4, 5, 7	9, 13, 14, 15, 16
Промышленное и гражданское строительство. Водоснабжение и водоотведение. Автомобильные дороги и аэродромы	1, 3, 4, 5, 8	11, 13, 15, 16
Подъемно-транспортные, строительные и дорожные средства и оборудование	2, 3, 6, 8	10, 12, 14, 16
Сервис транспортных и технологических машин. Автомобили и автомобильный сервис	2, 5, 7	10, 12, 14, 15
Эксплуатация железных дорог	1, 5, 10	12, 14, 15

Каждая контрольная работа оформляется в отдельной тетради, от руки, с полями в 5 см для пометок рецензента. На обложке тетради должны быть указаны следующие данные:

Кафедра «Строительная механика»

Дисциплина «Сопротивление материалов»

Контрольная работа № _____

Шифр студента _____

ФИО студента _____

Адрес студента _____

Перед решением задачи необходимо ознакомиться с правилами выбора варианта расчетной схемы и исходных числовых данных.

Исходные данные выбираются из таблиц, приведенных к каждой задаче, по первой букве имени и фамилии студента (см. примеры решения). Расчетную схему задачи необходимо определить по учебному шифру студента. Например, расчетную схему № 1 выбирают студенты, имеющие шифр 01, 31, 61 и т.д.

При получении проверенной, но не заченной работы студент должен исправить ошибки по замечаниям рецензента. Исправления, сделанные на отдельных листах, следует вложить (или вклейте) в соответствующие места прорецензированной работы. От-

дельно от работы исправления не рассматриваются. К исправленной работе должна быть приложена предыдущая рецензия.

Задачи, выполненные по исходным данным, не соответствующим шифру и фамилии студента, не рецензируются (не проверяются). Также не рецензируются и не возвращаются студенту контрольные работы, решенные на компьютере и распечатанные на принтере.

Порядок оформления контрольной работы

1. Решение каждой задачи необходимо начинать с новой страницы. В заголовке решения записывается номер задачи и вариант расчетной схемы. Ниже помещается таблица исходных данных.

2. Расчеты выполнять чернилами, чертежи мягким карандашом, с указанием всех необходимых размеров, соблюдая масштаб.

3. Каждый этап решения задачи должен быть озаглавлен. Расчеты сопровождаются краткими пояснениями и необходимыми расчетными схемами.

4. Оформление вычислений производится в следующем порядке: записать алгебраическую формулу, подставить данные в единицах системы СИ и без промежуточных вычислений записать результат с обязательным указанием его размерности. Результаты округлять до третьей значащей цифры.

Обозначение величин и их единицы

	Обозначение	Наименование величины	Единицы Международной системы (СИ)
Геометрические характеристики	b, h, d	Размер поперечного сечения	м
	l	Длина	м
	A	Площадь	м^2
	S_z, S_y	Статические моменты площади	м^3
	J_z, J_y	Оевые моменты инерции сечения	м^4
	J_p	Полярный момент инерции сечения	м^4
	J_{zy}	Центробежный момент инерции сечения	м^4
	W_z	Момент сопротивления сечения (относительно оси z)	м^3
	W_p	Полярный момент сопротивления сечения	м^3
	P, F	Сосредоточенная сила	Н (ニュ顿)
Напряжение и усилия	q	Интенсивность нагрузки, распределенной по линии	Н/м
	p	Интенсивность нагрузки, распределенной по площади (давление)	$\text{Н}/\text{м}^2$, Па (пascalь)
	m	Сосредоточенный момент (пара сил)	Н·м
	N	Продольная сила	Н
	Q_z, Q_y	Поперечные силы	Н
	M_z, M_y	Изгибающие моменты	Н·м
	M_{kp}	Крутящий момент	Н·м
	σ	Нормальное напряжение	Па
	τ	Касательное напряжение	Па
	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Главные напряжения	Па
Механические характеристики материалов	γ	Удельный вес материала	$\text{Н}/\text{м}^3$
	ρ	Плотность материала	$\text{кг}/\text{м}^3$
	α	Температурный коэффициент линейного расширения	1/град
	E	Модуль упругости (модуль Юнга)	Па
	G	Модуль сдвига	Па
	v	Коэффициент Пуассона	—
	σ_{pu}	Предел пропорциональности	Па
	σ_t	Предел текучести	Па
	σ_b	Предел прочности (временное сопротивление)	Па
	R_y	Расчетное сопротивление на растяжение по пределу текучести	Па
Расчетные сопротивления	R_s	Расчетное сопротивление на сдвиг (срез)	Па
	R_p	Расчетное сопротивление на смятие	Па
	R_{ws}	Расчетное сопротивление сварного шва на срез	Па
	R_b	Расчетное сопротивление бетона на сжатие	Па
	$[\sigma]$	Допускаемое нормальное напряжение	Па
	$[\tau]$	Допускаемое касательное напряжение	Па
	Δl	Изменение длины (удлинение), абсолютная деформация	м
	ϵ	Относительная линейная деформация	—
	γ	Угловая деформация (угол сдвига)	рад (радиан)
	φ	Угол поворота (закручивания) сечения	рад (радиан)
Деформации	θ	Относительный угол закручивания	рад/м
	δ	Перемещение точки (сечения)	м
	u	Перемещение по оси x	м
	v	Перемещение по оси y	м
	w	Перемещение по оси z	м

Латинский алфавит		
Буква		Название
прописная	строчная	
A	a	а
B	b	бэ
C	c	цэ
D	d	дэ
E	e	э
F	f	эф
G	g	же
H	h	аш
I	i	и
J	j	йот/джи
K	k	ка
L	l	эл
M	m	эм
N	n	эн
O	o	о
P	p	пэ
Q	q	ку
R	r	эр
S	s	эс
T	t	тэ
U	u	у
V	v	вэ
W	w	дубль вэ
X	x	икс
Y	y	игрек
Z	z	зет/зета

Греческий алфавит		
Буква		Название
прописная	строчная	
Α	α	альфа
Β	β	бета
Γ	γ	гамма
Δ	δ	дельта
Ε	ε	эpsilon
Ζ	ζ	дзета
Η	η	эта
Θ	θ	тэта
Ι	ι	йота
Κ	κ	каппа
Λ	λ	лямбда
Μ	μ	мю
Ν	ν	ню
Ξ	ξ	кси
Ο	ο	омикрон
Π	π	пи
Ρ	ρ	ро
Σ	σ	сигма
Τ	τ	тай
Υ	υ	ипсилон
Φ	φ	фи
Χ	χ	хи
Ψ	ψ	пси
Ω	ω	омега

Программа теоретического курса «Сопротивление материалов». Часть I

1. Основные гипотезы и допущения, принятые в курсе «Сопротивление материалов».
2. Механические свойства материалов: деформативность, упругость, пластичность, изотропность, анизотропность и однородность.
3. Внутренние усилия, порядок их определения в поперечных сечениях стержней. Классификация простых деформаций стержня: растяжение-сжатие, сдвиг, кручение и изгиб.
4. Механические характеристики материалов: характеристики упругости, прочности и пластичности. Диаграммы растяжения пластичных и хрупких материалов.
5. Растяжение-сжатие стержней. Определение продольной силы. Нормальные напряжения, действующие в поперечном сечении стержня. Абсолютная и относительная деформации. Закон Гука, коэффициент Пуассона.
6. Методы расчета стержней на прочность по допускаемым напряжениям и по предельному состоянию. Условия прочности для пластичных и хрупких материалов.
7. Учет собственного веса при расчете стержней, испытывающих растяжение или сжатие.
8. Расчет статически неопределеных систем (СНС), элементы которых испытывают деформацию растяжения или сжатия.

9. Усилия в СНС от изменения температуры и неточности изготовления элементов.
10. Напряженное состояние (НС) в точке тела. Анализ линейного НС (одноосное растяжение или сжатие).
11. Анализ плоского НС (двоосное растяжение-сжатие): напряжения по наклонным площадкам, главные площадки и главные напряжения, экстремальные касательные напряжения.
12. Обобщенный и объемный законы Гука.
13. Сдвиг. Анализ НС и закон Гука при чистом сдвиге. Модуль сдвига G и его связь с модулем продольной упругости E .
14. Практические расчеты на сдвиг: расчет болтовых, заклепочных и сварных соединений.
15. Геометрические характеристики плоских сечений: статические моменты и моменты инерции сечений (осевые, центробежный, полярный).
16. Моменты инерции (МИ) сечений. Расчет МИ относительно параллельных и повернутых осей, понятия «главные оси» и «главные моменты инерции».
17. Кручение стержней. Внутреннее усилие – крутящий момент $M_{\text{кр}}$. Определение касательных напряжений, действующих в стержнях (валах) круглого поперечного сечения. Определение угла закручивания. Условия прочности и жесткости вала.
18. Плоский изгиб балок. Внутренние усилия: изгибающий момент M и поперечная сила Q , порядок их определения и построения эпюр M и Q . Дифференциальные зависимости при изгибе.
19. Определение нормальных напряжений при изгибе.
20. Расчет балок на прочность: понятие момента сопротивления сечения балки, условие прочности по нормальным напряжениям, подбор размеров поперечного сечения, определение грузоподъемности.
21. Определение касательных напряжений при изгибе. Проверка прочности балки по касательным напряжениям.
22. Анализ напряженного состояния при изгибе балок.
23. Особенности расчета составных балок.

1. Раствжение-сжатие стержня

Задача 1. Расчет продольных сил, напряжений и деформаций

В учебнике [1] – глава 2, § 2.1–2.4; в пособии [2] – темы 3, 4.

Условие. Стальной стержень нагружен тремя сосредоточенными силами P_1 , P_2 , P_3 . Величины сил, длины участков и площади поперечных сечений стержня заданы.

Требуется:

1. Определить продольные силы и построить эпюру N .
2. Определить нормальные напряжения, действующие в поперечных сечениях стержня, и построить эпюру σ .
3. Вычислить изменение длины (деформацию) участков стержня и полное удлинение (укорочение) стержня.

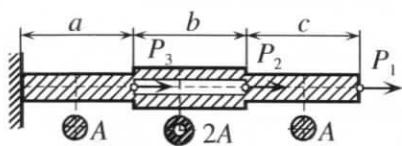
Принять модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Алфавит	a , см	b , см	c , см	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	A , см^2
	1	2	3	4	5	6	7
а б в	50	50	50	100	100	115*	7
г д е ё	54	56	54	110*	110*	110	8
ж з и й	58	58	58	120	120	120	9
к л м	62	62	62	125	130	130*	10
н о п	66	66	64	140	140	140	11
р с т	70	70	70	150*	150*	150*	12
у ф х	72	74	74	160	170*	160	13
ц ч ш щ	78	78	78	170*	170	170*	14
ъ ѿ ѿ	82	82	82	180	180	180	15
э ю я	86	86	86	190*	190*	190*	16

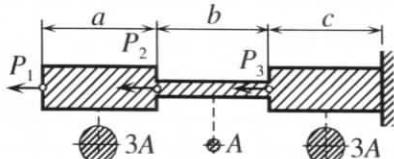
Примечание. Если значение силы отмечено звездочкой (*), то ее направление при изображении расчетной схемы необходимо изменить на противоположное.

Варианты расчетных схем

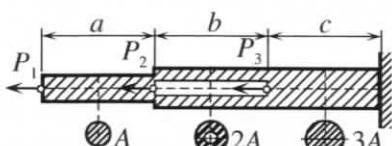
1,16



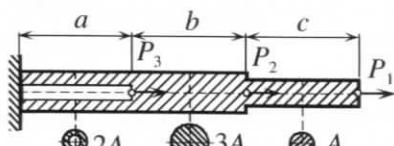
2,17



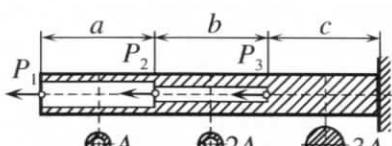
3,18



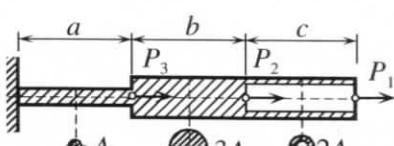
4,19



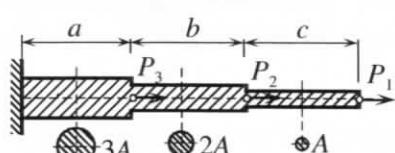
5,20



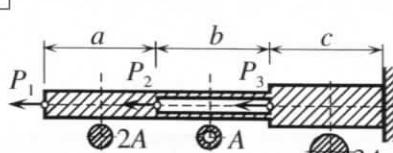
6,21



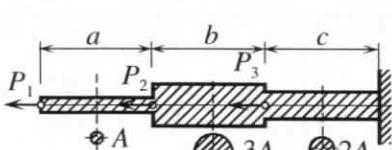
7,22



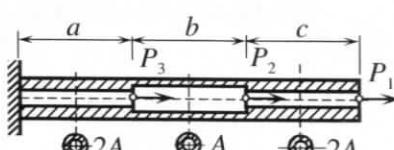
8,23



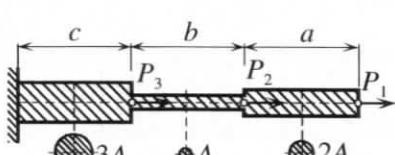
9,24



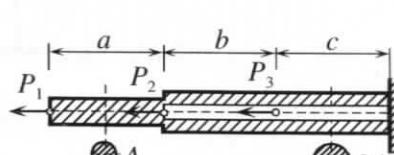
10,25



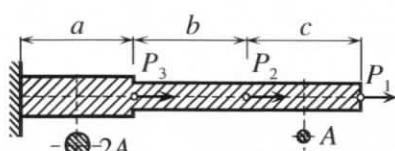
11,26



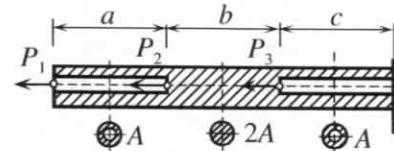
12,27



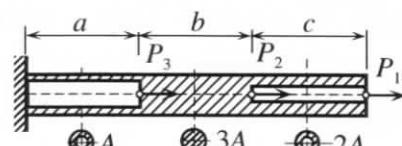
13,28



14,29



15,30



Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По своей фамилии и имени (например, Ф. Голубев) выбираем данные и заносим в таблицу. По учебному шифру (09-С-23) выбираем расчетную схему № 23.

Ф.	Г	о	л	у	б	е	в
1	2	3	4	5	6	7	
$a, \text{ см}$	$b, \text{ см}$	$c, \text{ см}$	$P_1, \text{ кН}$	$P_2, \text{ кН}$	$P_3, \text{ кН}$	$A, \text{ см}^2$	
72	56	64	125	170*	115*	8	

Изобразим расчетную схему стержня, соблюдая масштаб длин (рис. 1, а). На схеме указываем числовые значения нагрузок и длины участков. В нашем случае расчетную схему № 23 изображаем с измененным направлением сил P_2 и P_3 , так как значение этих сил отмечено звездочкой.

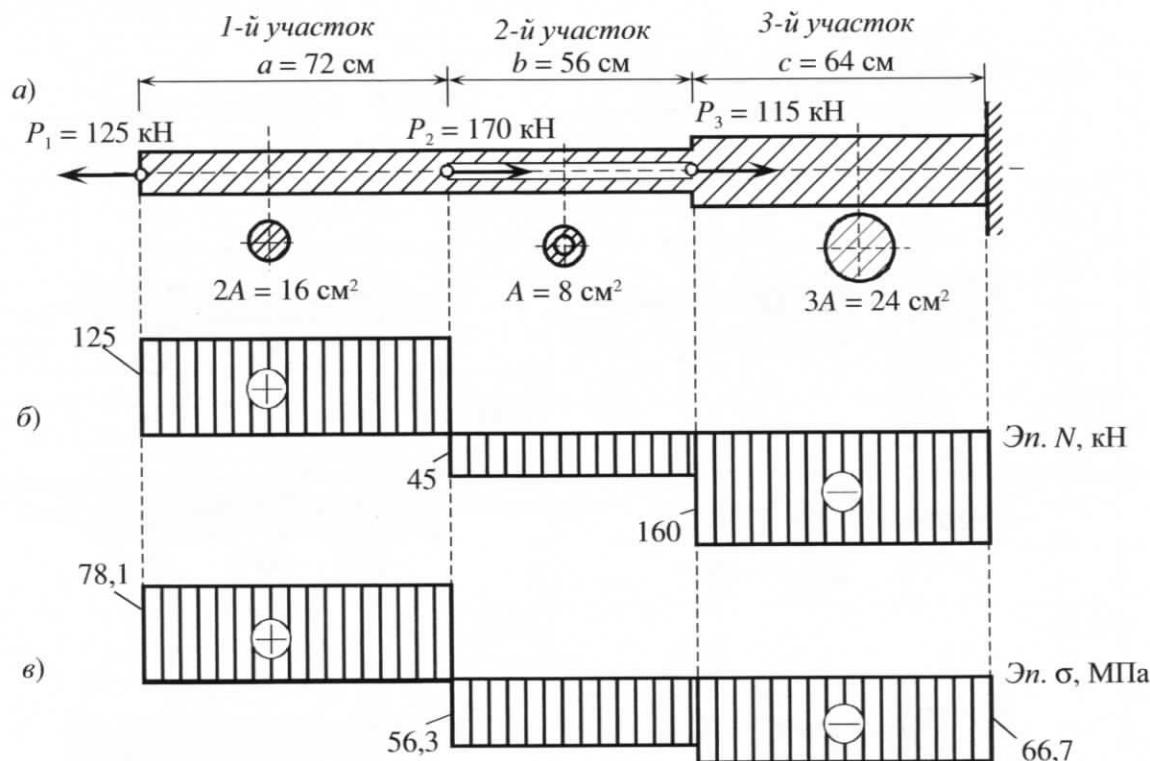


Рис. 1. Расчетная схема, эпюры N и σ

2. Определение продольных сил

Для определения продольных сил разделим стержень на три участка. Границами участков являются сечения, в которых приложены сосредоточенные силы. Рассекая стержень в пределах каждого участка, составим уравнения равновесия соответствующих отсеченных частей стержня (рис. 2, а, б, в). Для правильного определения знака продольной силы вектор N необходимо направлять от сечения. Тогда положительное значение N будет соответствовать *растяжению*, а отрицательное – *сжатию* стержня.

1-й участок: $\Sigma F_x = N_1 - P_1 = 0$, $N_1 = P_1 = 125 \text{ кН}$ (растяжение).

2-й участок: $\Sigma F_x = N_2 + P_2 - P_1 = 0$, $N_2 = P_1 - P_2 = 125 - 170 = -45 \text{ кН}$ (сжатие).

3-й участок: $\Sigma F_x = N_3 + P_3 + P_2 - P_1 = 0$, $N_3 = 125 - 170 - 115 = -160 \text{ кН}$ (сжатие).

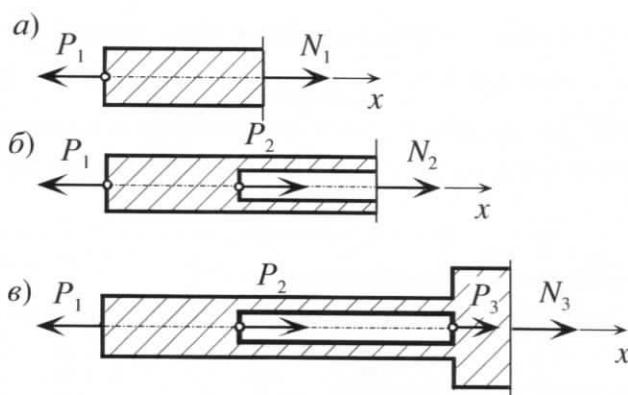


Рис. 2. Схема усилий, действующих на отсеченные части стержня

По полученным значениям строим эпюру N , откладывая положительные значения вверх от оси, а отрицательные – вниз (рис. 1, б).

Правильность построения эпюры проверим «по скачкам»: величина разрыва (скачка) на эпюре должна быть равна значению сосредоточенной силы, приложенной в данном сечении. Например, скачок на границе первого и второго участка, где действует сила P_2 , равен $125 - (-45) = 170$ кН, т.е. величине этой силы; скачок на границе второго и третьего участка, где приложена сила P_3 , равен $-45 - (-160) = 115$ кН – величине силы P_3 . Вывод: эпюра построена правильно.

3. Определение нормальных напряжений

Нормальные напряжения, действующие в сечениях каждого участка, определим по формуле (3.1) [2]:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{2A} = \frac{125 \cdot 10^3}{2 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 7,81 \cdot 10^7 \text{ Па} = 78,1 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A} = \frac{-45 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} = -5,63 \cdot 10^7 \text{ Па} = -56,3 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{N_3}{3A} = \frac{-160 \cdot 10^3}{3 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = -6,67 \cdot 10^7 \text{ Па} = -66,7 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений (рис. 1, в).

4. Определение деформации стержня

Удлинение (абсолютную деформацию) участков стержня определим по формуле (4.1) [2]:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 a}{E2A} = \frac{125 \cdot 10^3 \cdot 72 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,28 \text{ мм},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 b}{EA} = \frac{-45 \cdot 10^3 \cdot 56 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = -1,6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,16 \text{ мм},$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 c}{E3A} = \frac{-160 \cdot 10^3 \cdot 64 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = -2,1 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,21 \text{ мм}.$$

Общую деформацию стержня определим как алгебраическую сумму удлинений всех участков по формуле (4.2) [2]:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,28 - 0,16 - 0,21 = -0,09 \text{ мм}.$$

Знак минус показывает, что стержень укоротился.

Задача 2. Расчет усилий, напряжений и деформаций в стержневых системах

В учебнике [1] – глава 2, § 2.1–2.4; в пособии [2] – темы 3, 4.

Условие. Стержневая система состоит из абсолютно жесткой балки, расположенной горизонтально, и стального стержня, площадь поперечного сечения и длина которого заданы.

Требуется:

1. Определить усилие в стальном стержне.
2. Определить напряжение, действующее в поперечном сечении стержня, и проверить прочность.
3. Определить перемещение точки K .

Принять модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Расчетное сопротивление R_y выбрать из приведенной ниже таблицы.

Алфавит	l , кН	A , см^2	F , кН	R_y , МПа	a , м
	1	2	3	4	5
а б в	2,0	15	100	190	0,1
г д е ё	2,2	14	110	200	0,2
ж з и й	2,4	13	120	210	0,3
к л м	2,6	12	130	220	0,4
н о п	2,8	13	140	230	0,1
р с т	2,9	10	150	240	0,2
у ф х	2,0	11	140	250	0,3
ц ч и щ	2,2	12	130	190	0,4
ъ ы ь	2,4	13	120	200	0,1
э ю я	2,5	14	110	210	0,2

Варианты расчетных схем

(1)	(2)	(3)
(4)	(5)	(6)
(7)	(8)	(9)
(10)	(11)	(12)
(13)	(14)	(15)
(16)	(17)	(18)
(19)	(20)	(21)
(22)	(23)	(24)
(25)	(26)	(27)
(28)	(29)	(30)

Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По своей фамилии и имени (например, И. Ащев) выбираем данные и заносим в таблицу. По учебному шифру выбираем вариант расчетной схемы и изображаем ее в масштабе с указанием размеров и значения силы (рис. 3).

И.	A	щ	е	в
1	2	3	4	5
$l, \text{м}$	$A, \text{см}^2$	F, kH	$R_y, \text{МПа}$	$a, \text{м}$
2,4	15	130	200	0,1

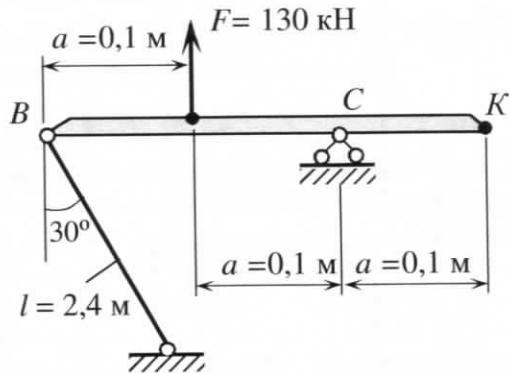


Рис. 3. Расчетная схема стержневой системы

2. Определение усилий в стальном стержне

Для определения усилия в наклонном стержне рассмотрим равновесие абсолютно жесткой балки BK , на которую действует следующая система сил (рис. 4): F – внешняя нагрузка; H_C и V_C – горизонтальная и вертикальная реакции со стороны шарнирно-неподвижной опоры; N – усилие со стороны стального стержня, приложенное в точке B . Вектор N направим от сечения. Запишем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= H_C + N \sin 30^\circ = 0, \\ \sum P_y &= V_C + F - N \cos 30^\circ = 0, \\ \sum m_C &= -F \cdot 0,1 + N \cos 30^\circ \cdot 2 \cdot 0,1 = 0.\end{aligned}$$

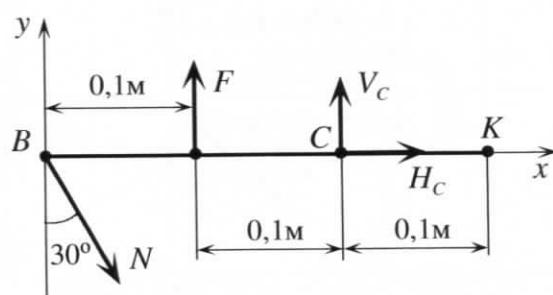


Рис. 4. Схема усилий, действующих на абсолютно жесткую балку BK

Из последнего соотношения получим значение усилия N :

$$N = \frac{F}{2 \cos 30^\circ} = \frac{130}{2 \cdot 0,866} = 75,1 \text{ кН.}$$

Продольная сила со знаком плюс означает, что стержень растянут.

3. Проверка прочности стержня

Нормальное напряжение, действующее в поперечном сечении стержня, определим по формуле (3.1) [2]:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{75,1 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^{-4}} = 5,01 \cdot 10^7 \text{ Па} = 50,1 \text{ МПа.}$$

Проверим прочность стержня по формуле (3.4) [2]:

$$\sigma_{\max} = \frac{|N|}{A} \leq R_y.$$

Имеем $|\sigma| = 50,1 \text{ МПа} < R_y = 200 \text{ МПа}$. Условие выполняется – прочность конструкции обеспечена. Фактический коэффициент запаса прочности

$$k = \frac{R_y}{|\sigma|} = \frac{200}{50,1} = 3,99.$$

4. Определение перемещения точки K

Для определения перемещения точки конструкции изобразим вид деформированной стержневой системы (рис. 5).

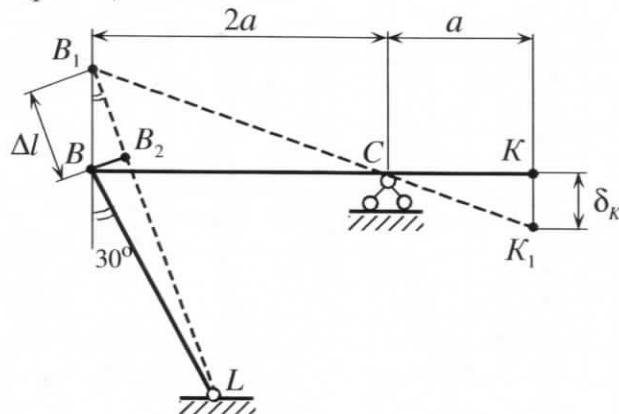


Рис. 5. Вид деформированной системы

Проведем анализ перемещений элементов системы. Так как стержень BK абсолютно жесткий, то под действием внешней нагрузки он не деформируется и остается прямым. При этом он поворачивается относительно неподвижного шарнира C по часовой стрелке. Угол поворота стержня очень мал, так как деформация Δl намного меньше линейных размеров конструкции. Учитывая это, можно считать, что точки B и K перемещаются только по вертикали.

Удлинение стержня BL равно отрезку B_1B_2 , который отсекается перпендикуляром, опущенным из точки B. Угол BB_1B_2 с учетом малости деформаций практически равен 30° .

Изменение длины стержня определим по формуле (4.1) [2]:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{75,1 \cdot 10^3 \cdot 2,4}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 15 \cdot 10^{-4}} = 6,01 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,601 \text{ мм.}$$

Из подобия треугольников CBB_1 и CKK_1 запишем $\frac{BB_1}{2a} = \frac{\delta_K}{a}$,

$$\text{откуда } \delta_K = \frac{BB_1}{2}.$$

Длину отрезка BB_1 определим как гипotenузу прямоугольного треугольника BB_1B_2 :

$$BB_1 = \frac{\Delta l}{\cos 30^\circ} = \frac{0,601}{0,866} = 0,694 \text{ мм.}$$

Перемещение точки K составит

$$\delta_K = \frac{0,694}{2} = 0,347 \text{ мм.}$$

Задача 3. Расчет стержневых систем на прочность

В учебнике [1] – глава 2, § 2.1–2.4; в пособии [2] – тема 3.

Условие. Ферма из стальных стержней нагружена сосредоточенными силами.

Требуется:

1. Определить опорные реакции.

2. Определить усилия в трех стержнях, отмеченных цифрами 1, 2 и 3.

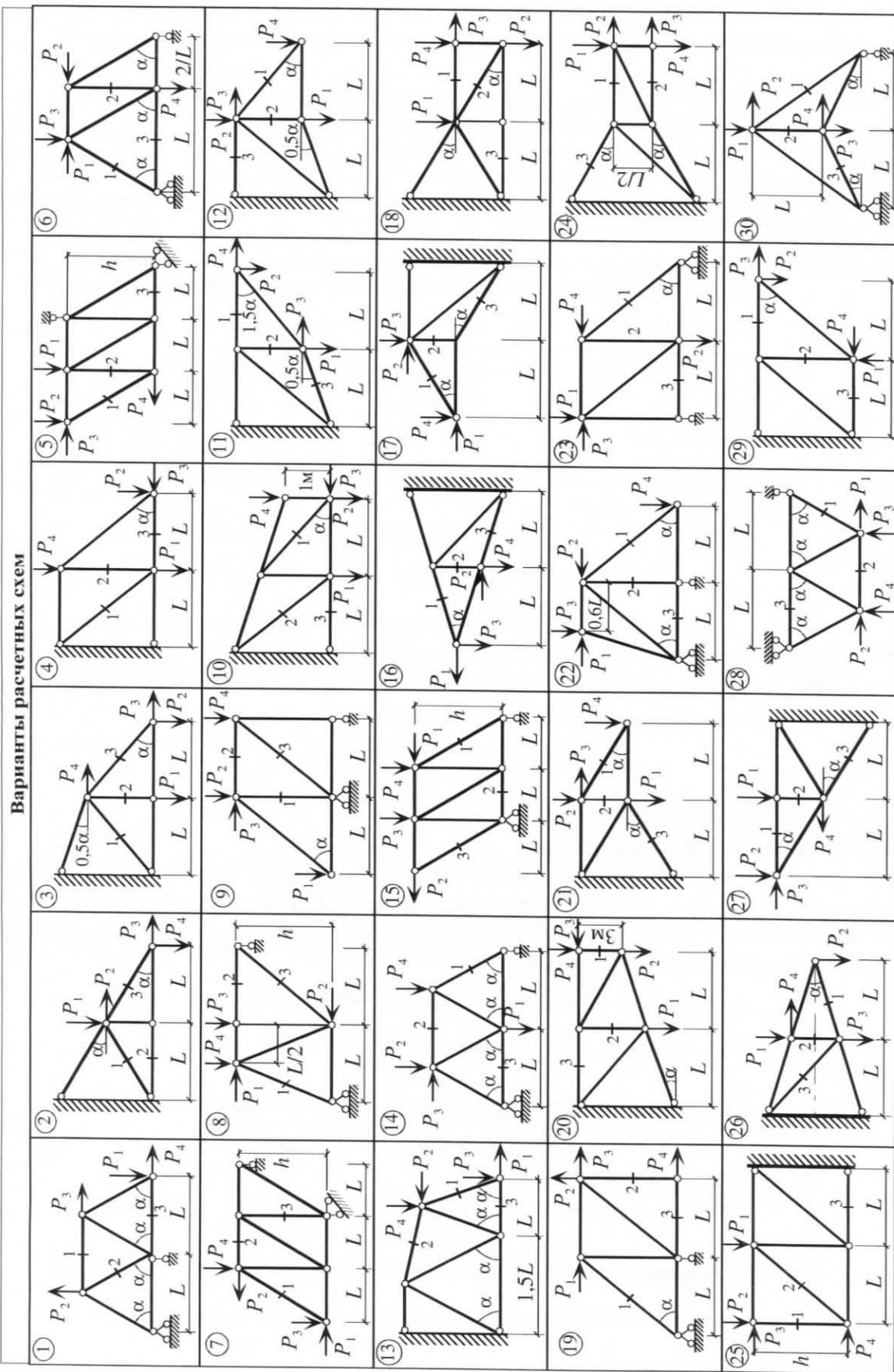
3. Подобрать номера прокатных профилей для каждого из трех стержней, используя таблицы сортамента стального проката.

4. Для одного из стержней (по выбору студента) определить изменение его длины.

Принять модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Расчетное сопротивление стали R_y выбрать из таблицы.

Алфавит	P_1/P_2 , кН	P_3/P_4 , кН	L , м	h , м	α , град	R_y , МПа	Тип сечения
	1	2	3	4	5	6	
а б в	0/200	400/0	2,2	2,0	35	200	Два равнополочных уголка
г д е ё	150/0	0/450	2,5	1,8	37	220	Два неравнополочных уголка
ж з и ѹ	0/180	380/0	3,0	1,6	40	230	Швеллер
к л м	110/0	0/420	3,2	2,0	42	300	Равнополочный уголок
н о п	0/250	460/0	3,5	1,4	45	250	Неравнополочный уголок
р с т	300/0	0/360	3,4	2,0	48	240	Швеллер
у ф х	0/320	500/0	3,3	1,8	50	210	Два неравнополочных уголка
ц ч ш ѿ	260/0	0/520	2,8	1,6	49	190	Два равнополочных уголка
ъ ѿ ѿ	0/280	600/0	4,0	2,4	46	180	Швеллер
э ю я	300/0	0/480	3,6	2,2	43	160	Равнополочный уголок

Варианты расчетных схем



Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По своей фамилии и имени (например, С. Ивлев) выбираем данные и заносим в таблицу. По учебному шифру определяем вариант расчетной схемы.

C.	И	в	л	е	в	C.
1	2	3	4	5	6	7
$P_1/P_2, \text{ кН}$	$P_3/P_4, \text{ кН}$	$L, \text{ м}$	$h, \text{ м}$	$\alpha, \text{ град}$	$R_y, \text{ МПа}$	Тип сечения
300/0	380/0	2,2	2	—	200	Швеллер

Примечание. Запись данных $P_1/P_2 \rightarrow 300/0$ означает, что $P_1 = 300 \text{ кН}$, а $P_2 = 0$. Усилия, равные нулю, на расчетной схеме не показываем.

Изобразим расчетную схему в масштабе, указав размеры и значение усилий (рис. 6).

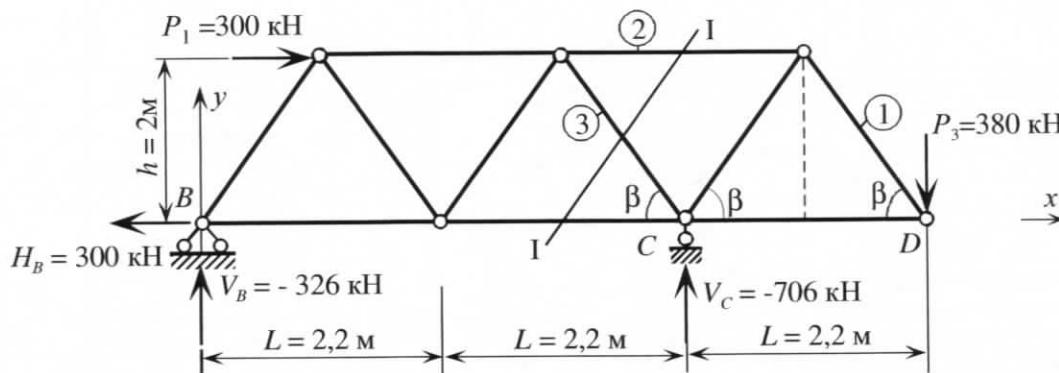


Рис. 6. Расчетная схема фермы

Необходимо обратить внимание на то, что на расчетных схемах задана или высота фермы h , или угол α . Для данного варианта задана высота. Следовательно, необходимо предварительно определить угол наклона стержней β :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{0,5L} = \frac{2}{1,1} = 1,82,$$

откуда угол $\beta = \arctg 1,82 = 61^\circ$.

2. Определение опорных реакций

На рис. 6 показаны усилия, действующие в опорах фермы: в шарнирно-неподвижной опоре B – горизонтальная и вертикальная составляющие H_B , V_B ; в шарнирно-подвижной C – только вертикальная реакция V_C . Запишем уравнения равновесия фермы и определим опорные реакции:

$$\sum F_x = -H_B + P_1 = 0, \text{ откуда } H_B = P_1 = 300 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = -P_1 h - P_3 \cdot 3L + V_C \cdot 2L = 0,$$

откуда

$$V_C = \frac{P_1 h + P_3 \cdot 3L}{2L} = \frac{300 \cdot 2 + 380 \cdot 3 \cdot 2,2}{2 \cdot 2,2} = 706 \text{ кН};$$

$$\sum m_C = -V_B \cdot 2L - P_1 h - P_3 \cdot L = 0,$$

откуда

$$V_B = \frac{-P_1 h - P_3 \cdot L}{2L} = \frac{-300 \cdot 2 - 380 \cdot 2,2}{2 \cdot 2,2} = -326 \text{ кН}.$$

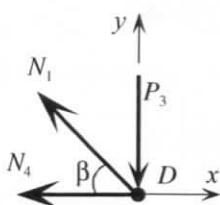
Для проверки расчета составляем еще одно уравнение равновесия фермы:

$$\sum F_y = V_B + V_c - P_3 = -326 + 706 - 380 = 0.$$

Уравнение выполняется, значит реакции определены правильно.

3. Определение продольных сил в стержнях

Для определения продольных сил в стержнях фермы используем метод вырезания узлов или метод Риттера.



Вырежем узел D и запишем уравнение равновесия

$$\sum F_y = -P_3 + N_1 \sin \beta = 0,$$

откуда

$$N_1 = \frac{P_3}{\sin \beta} = \frac{380}{0,875} = 434 \text{ кН (стержень 1 растянут).}$$

Проведем сечение I-I и рассмотрим равновесие правой части фермы.

$$\sum F_y = N_3 \sin \beta + V_C - P_3 = 0,$$

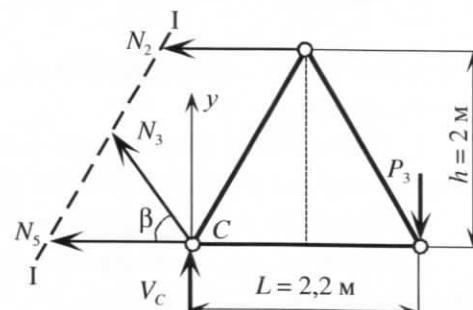
$$N_3 = \frac{P_3 - V_C}{\sin \beta} = \frac{380 - 706}{0,875} = -373 \text{ кН}$$

(стержень 3 сжат).

$$\sum m_C = N_2 h - P_3 L = 0,$$

откуда

$$N_2 = \frac{P_3 L}{h} = \frac{380 \cdot 2,2}{2} = 418 \text{ кН (стержень 2 растянут).}$$



4. Расчет на прочность

Из условия прочности стержня на растяжение (сжатие) $\sigma_{\max} = \frac{|N|}{A} \leq R_y$

определим требуемую площадь сечения стержней: $A \geq \frac{|N|}{R_y}$.

Расчет 1-го стержня

$$A_1 \geq \frac{|N_1|}{R_y} = \frac{434 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 2,17 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 21,7 \text{ см}^2.$$

Из таблицы сортамента (табл. П3) подбираем номер швеллера минимальной площади, но не менее $21,7 \text{ см}^2$. Это швеллер № 18а, площадь которого $A_1 = 22,2 \text{ см}^2$.

Расчет 2-го стержня

$$A_2 \geq \frac{|N_2|}{R_y} = \frac{418 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 2,09 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 20,9 \text{ см}^2.$$

Из таблицы сортамента выбираем швеллер № 18а с площадью $22,2 \text{ см}^2$.

Расчет 3-го стержня

$$A_3 \geq \frac{|N_3|}{R_y} = \frac{373 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 1,87 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 18,7 \text{ см}^2.$$

Из таблицы сортамента выбираем швеллер № 16а с площадью $19,5 \text{ см}^2$.

Результаты расчета занесем в таблицу.

Номер стержня	N , кН	Номер швеллера	Площадь сечения стержня, см^2
1	434	18a	22,2
2	418	18a	22,2
3	-373	16a	19,5

5. Определение удлинения 2-го стержня

Удлинение 2-го стержня определим по формуле (4.1) [2]:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{418 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 22,2 \cdot 10^{-4}} = 20,7 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 2,07 \text{ мм.}$$

Задача 4. Учет собственного веса стержня

В учебнике [1] – глава 2, § 2.5; в пособии [2] – тема 5.

Условие. Колонна из бетона запроектирована в виде ступенчатого стержня.

Требуется:

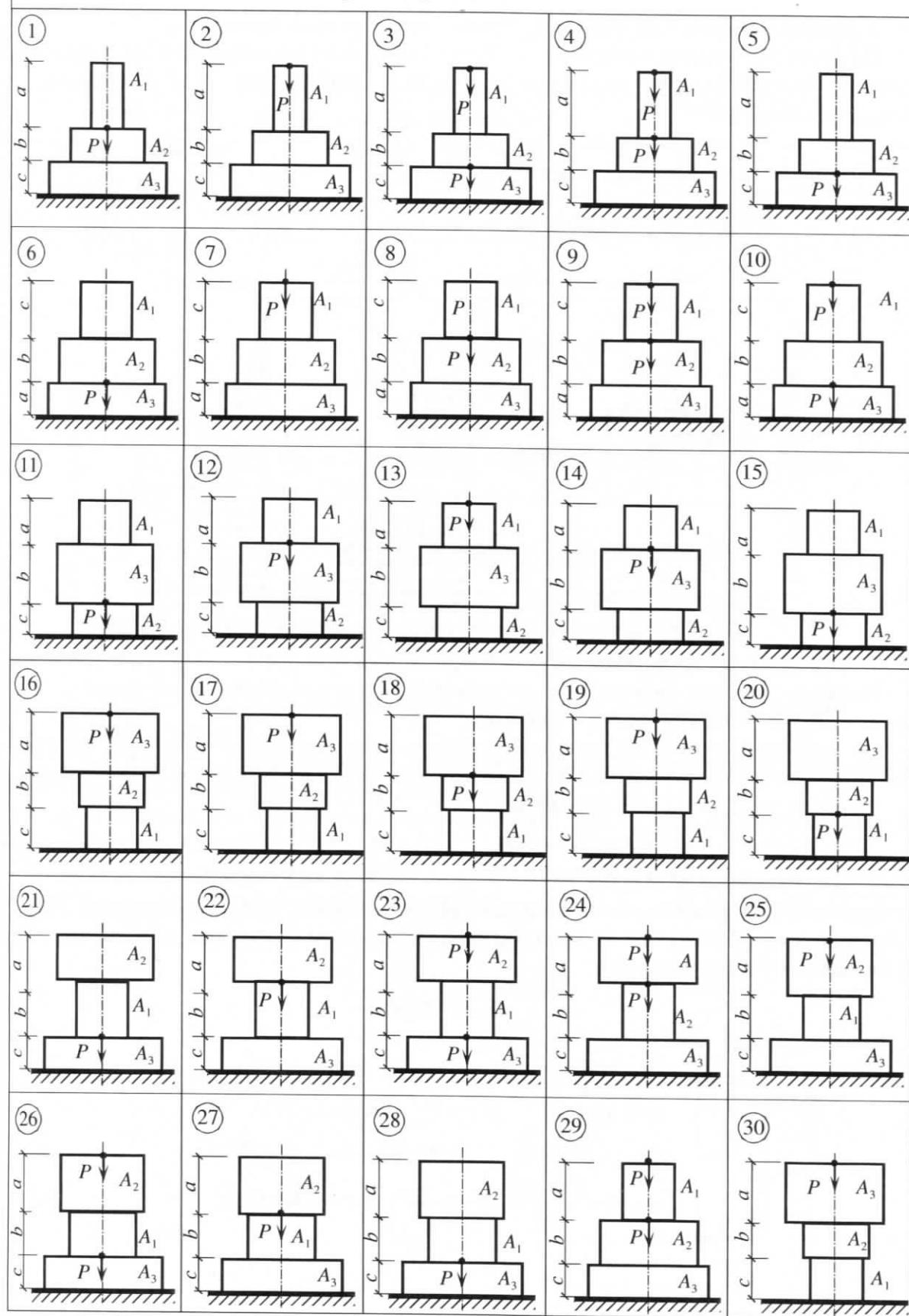
1. Определить продольные силы и нормальные напряжения от действия сосредоточенных сил и собственного веса. Построить эпюры N и σ .

2. Проверить прочность колонны.

Механические характеристики бетона: объемный вес $\gamma = 25 \text{ кН/м}^3$; расчетное сопротивление бетона на сжатие $R_b = 5 \text{ МПа}$.

Алфавит	a , м	b , м	c , м	$A_1, \text{м}^2$	$A_2, \text{м}^2$	$A_3, \text{м}^2$	$P, \text{кН}$
	1	2	3	4	5	6	7
<i>а б в</i>	2,0	2,5	3,0	1,2	2,1	4,0	100
<i>г д е ё</i>	2,5	2,8	3,5	1,4	2,3	4,2	110
<i>ж з и ї</i>	3,0	3,0	3,8	1,6	2,5	4,4	120
<i>к л м</i>	3,5	3,2	4,0	1,8	2,7	4,6	130
<i>н о п</i>	4,0	3,5	3,9	2,0	3,0	4,8	140
<i>р с т</i>	3,8	3,4	3,7	1,9	3,1	5,0	150
<i>у ф х</i>	3,6	3,1	3,5	1,7	3,3	4,9	160
<i>ц ч ш ў</i>	3,4	2,9	3,3	1,5	3,5	4,7	170
<i>ъ ѿ ѿ</i>	3,2	2,7	3,1	1,3	3,4	4,5	180
<i>э ю я</i>	3,0	2,4	2,9	1,1	3,2	4,3	190

Варианты расчетных схем



Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По фамилии и имени (например, С. Ивлев) выбираем исходные данные и заносим в таблицу. Расчетную схему выбираем по учебному шифру (рис. 7) и изображаем, соблюдая масштаб длин.

C.	И	в	л	е	в	C.
1	2	3	4	5	6	7
a, м	b, м	c, м	$A_1, \text{м}^2$	$A_2, \text{м}^2$	$A_3, \text{м}^2$	P, kH
3,8	3,0	3,0	1,8	2,3	4,0	150

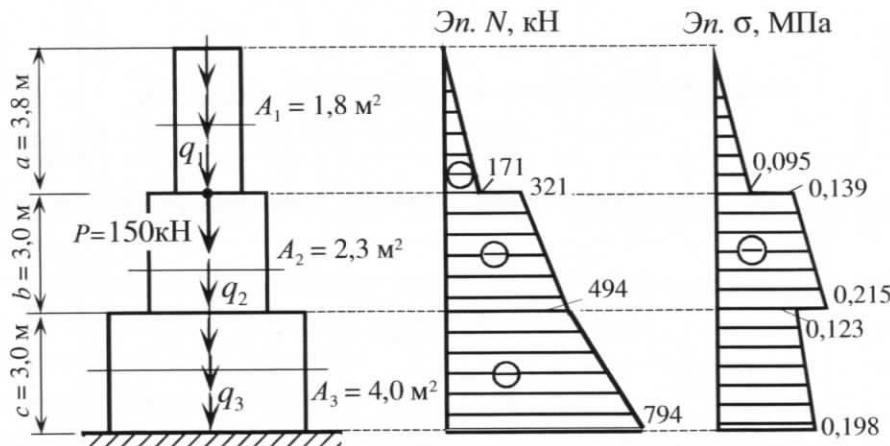


Рис. 7. Расчетная схема колонны, эпюры продольных сил и напряжений

2. Определение продольных сил и напряжений

Разобьем колонну на участки с постоянной площадью поперечного сечения: 1-й – высотой a ; 2-й – высотой b ; 3-й – высотой c .

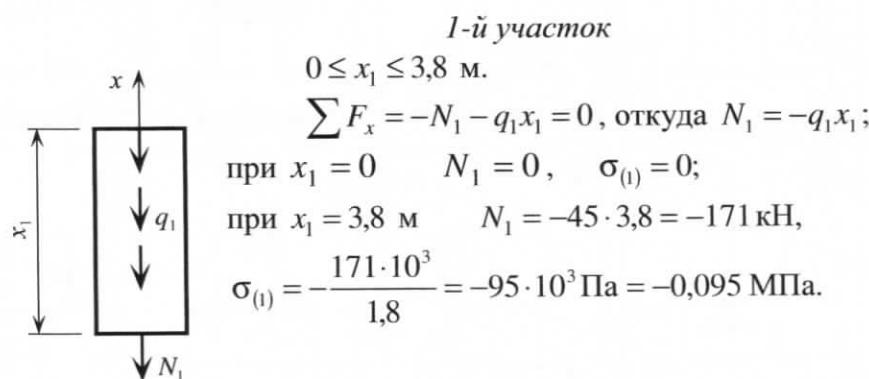
На расчетной схеме действие собственного веса заменяется нагрузкой, распределенной по оси колонны. Вычислим интенсивность этих нагрузок для каждого участка:

$$q_1 = \gamma A_1 = 25 \cdot 1,8 = 45,0 \text{ кН/м},$$

$$q_2 = \gamma A_2 = 25 \cdot 2,3 = 57,5 \text{ кН/м},$$

$$q_3 = \gamma A_3 = 25 \cdot 4 = 100 \text{ кН/м}.$$

Рассматривая равновесие отсеченных частей, составим уравнения для определения продольных сил. Вычислим их значения и величину нормальных напряжений в сечениях на каждом участке колонны.



2-й участок

$$0 \leq x_2 \leq 3 \text{ м.}$$

$$\sum F_x = -N_2 - q_1 a - P - q_2 x_2 = 0,$$

$$\text{откуда } N_2 = -45 \cdot 3,8 - 150 - 57,5 x_2 = -321 - 57,5 x_2;$$

$$\text{при } x_2 = 0 \quad N_2 = -321 \text{ кН,}$$

$$\sigma_{(2)} = -\frac{321 \cdot 10^3}{2,3} = -139 \cdot 10^3 \text{ Па} = -0,139 \text{ МПа;}$$

$$\text{при } x_2 = 3,0 \text{ м} \quad N_2 = -321 - 57,5 \cdot 3 = -494 \text{ кН,}$$

$$\sigma_{(2)} = -\frac{494 \cdot 10^3}{2,3} = -215 \cdot 10^3 \text{ Па} = -0,215 \text{ МПа.}$$

3-й участок

$$0 \leq x_3 \leq 3 \text{ м.}$$

$$\sum F_x = -N_3 - q_1 a - q_2 b - P - q_3 x_3 = 0,$$

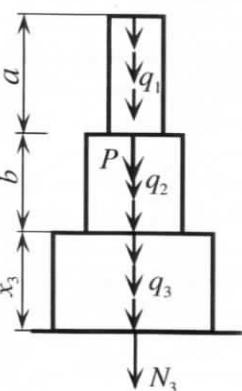
$$\text{откуда } N_3 = 45 \cdot 3,8 - 57,5 \cdot 3 - 150 - 100 x_3 = -494 - 100 x_3;$$

$$\text{при } x_3 = 0 \quad N_3 = -494 \text{ кН,}$$

$$\sigma_{(3)} = -\frac{494 \cdot 10^3}{4,0} = -123 \cdot 10^3 \text{ Па} = -0,123 \text{ МПа;}$$

$$\text{при } x_3 = 3 \text{ м} \quad N_3 = -494 - 100 \cdot 3 = -794 \text{ кН,}$$

$$\sigma_{(3)} = -\frac{794 \cdot 10^3}{4} = -198 \cdot 10^3 \text{ Па} = -0,198 \text{ МПа.}$$



По полученным данным строим эпюры продольных сил N и напряжений σ . Проверим эпюру N .

1. Так как есть распределенные нагрузки на участках, то эпюра N очерчена линиями, наклонными к продольной оси колонны.

2. В сечении, где приложена сосредоточенная сила P , есть скачок на эпюре N , равный величине силы $321 - 171 = 150 \text{ кН}$.

3. Проверка прочности колонны

Так как $|\sigma|_{\max} = 0,215 \text{ МПа} < R_b = 5 \text{ МПа}$, то следует, что прочность колонны обеспечена с фактическим коэффициентом запаса:

$$k = \frac{R_b}{\sigma_{\max}} = \frac{5}{0,22} = 22,7.$$

2. Статически неопределенные системы

Задача 5. Расчет статически неопределенного ступенчатого стержня

В учебнике [1] – глава 2 § 2.9; в пособии [2] – тема 6.

Условие. Стальной стержень жестко защемлен по концам и нагружен двумя сосредоточенными силами P_1 и P_2 .

Требуется:

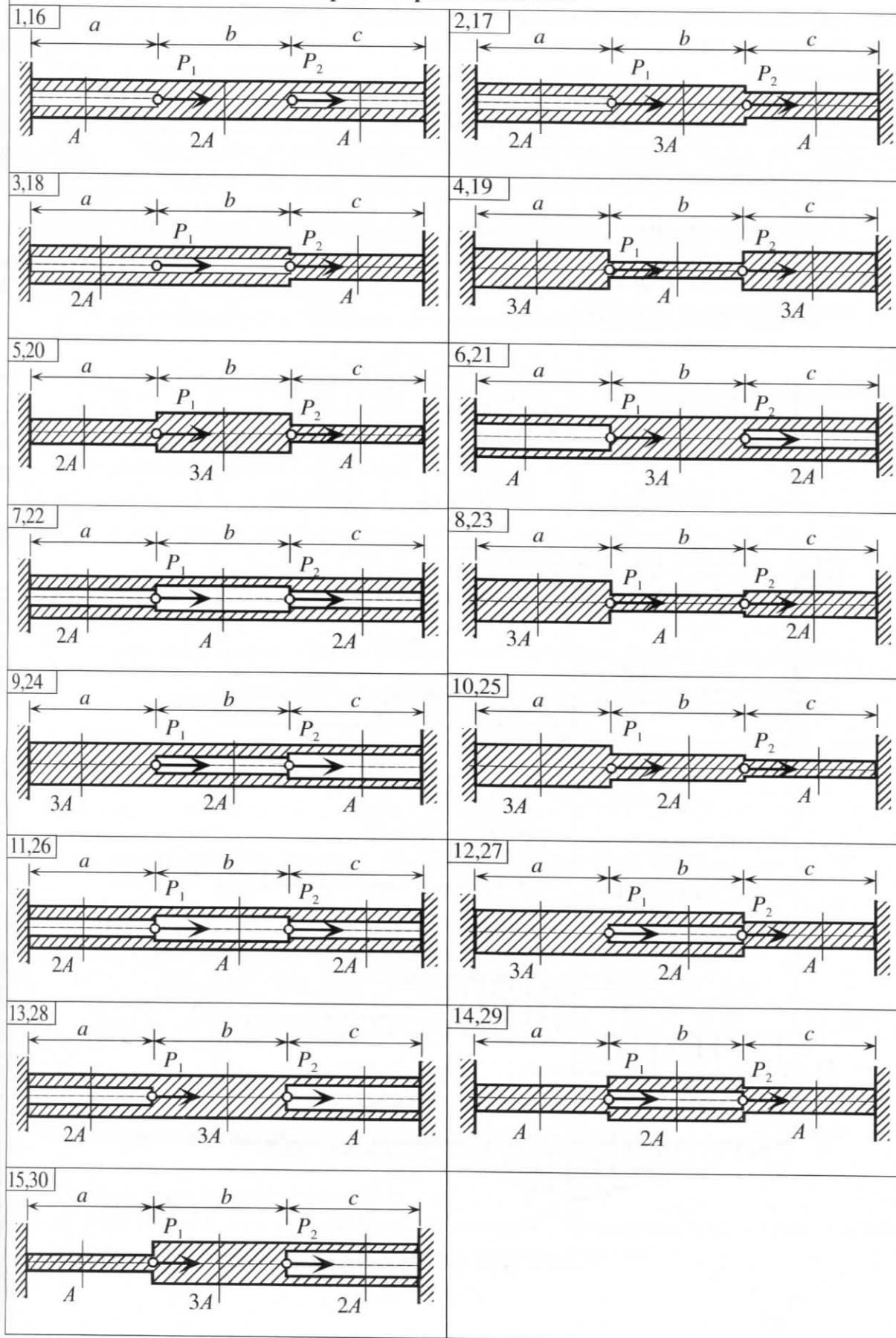
1. Раскрыть статическую неопределенность – определить опорные реакции.
2. Вычислить продольные силы и построить эпюру N .
3. Определить нормальные напряжения, действующие в поперечных сечениях стержня, и построить эпюру σ .
4. Построить эпюру перемещений сечений.

Принять модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Алфавит	a , см	b , см	c , см	P_1 , кН	P_2 , кН	A , см^2
	1	2	3	4	5	6
а б в	45	45	45	350	350*	30
г д е ё	50	50	50	320*	320	32
ж з и ї	55	55	55	280	280*	34
к л м	60	60	60	250*	250	36
н о п	65	65	65	220	220*	38
р с т	70	70	70	190*	190	40
у ф х	75	75	75	160	160*	42
ү ч и ј	80	80	80	130*	130	44
ъ ы ь	85	85	85	100	100*	46
э ю я	90	90	90	70*	70*	48

Примечание. Если значение силы отмечено звездочкой (*), то ее направление при изображении расчетной схемы необходимо изменить на противоположное.

Варианты расчетных схем



Пример решения

1. Выбор данных и изображение расчетной схемы

По имени и фамилии (например, Ф. Голубев) выбираем исходные данные и составляем таблицу.

Ф.	Г	о	л	у	б	е	в
1	2	3	4	5	6		
a, см	b, см	c, см	P_1 , кН	P_2 , кН	A , см^2		
75	50	65	250*	160*	30		

Изобразим расчетную схему стержня, соблюдая масштаб длин, с указанием числовых значений нагрузок и длин участков (рис. 8, а). В таблице исходных данных значение сил P_1 и P_2 отмечено звездочкой (*), поэтому направление этих нагрузок изменяем на противоположное (рис. 8, б).

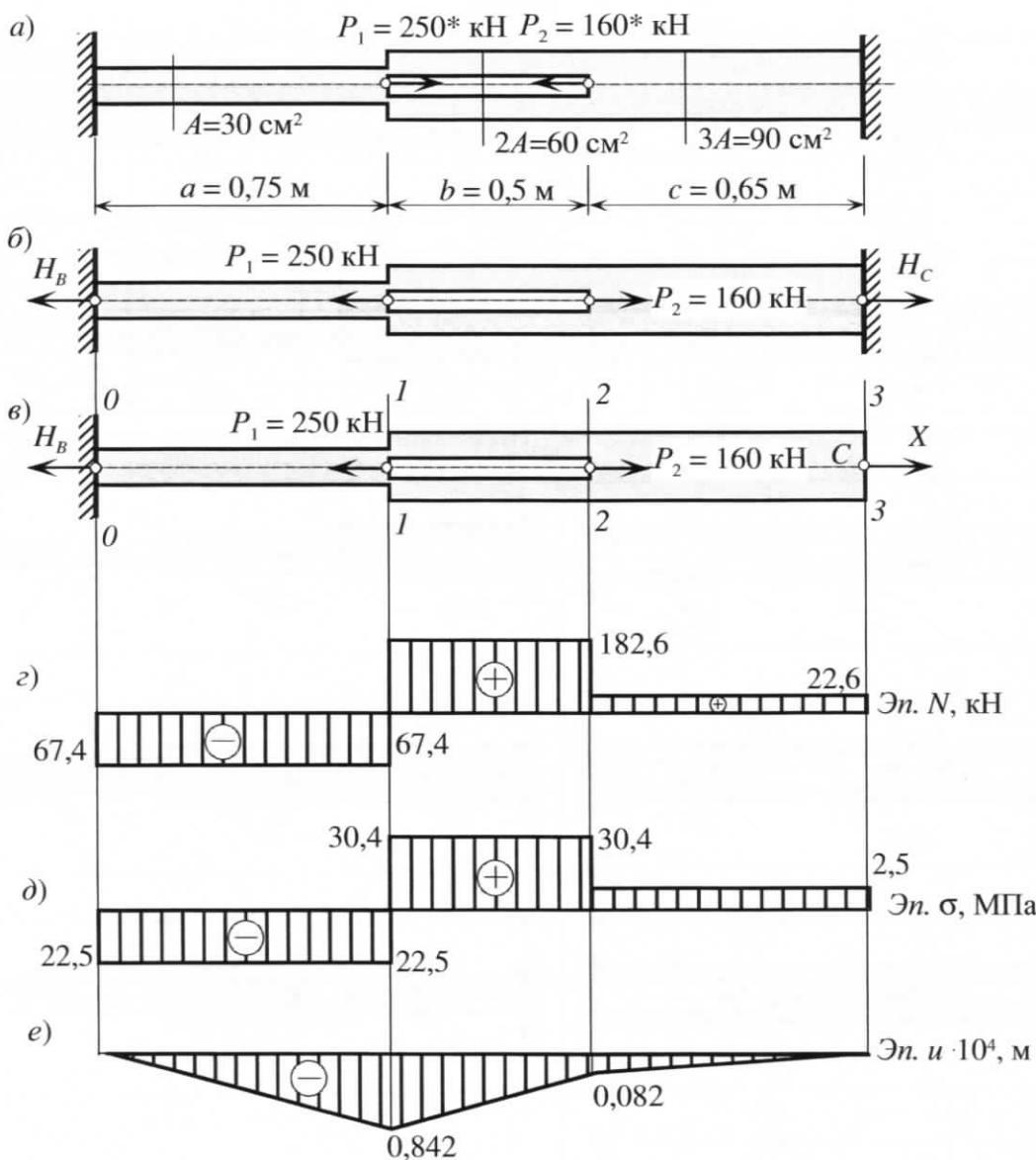


Рис. 8. Расчетная схема, эпюры N , σ и u

2. Раскрытие статической неопределенности системы

Раскрыть статическую неопределенность системы – значит определить неизвестные опорные реакции.

Проведем анализ системы сил, действующих на стержень (рис. 8, б). В заделках действуют реакции H_B и H_C , направленные по оси стержня. Опорные моменты и вертикальные составляющие реакций в данном случае равны нулю (на схеме не показаны). Следовательно, неизвестных реакций две. Для системы сил, действующих по одной линии, можно составить только одно уравнение статики. Таким образом, степень статической неопределенности системы $n = 2 - 1 = 1$. Задача один раз статически неопределенна.

Выберем основную систему. Отбросим правую заделку, действие которой заменим неизвестным усилием X (рис. 8, в).

Рассмотрим три стороны задачи:

1. *Статическая сторона*. Запишем уравнение равновесия основной системы:

$$\sum F_x = -H_B - P_1 + P_2 + X = 0. \quad (1)$$

2. *Геометрическая сторона задачи*. Рассмотрим деформацию стержня. Из условий закрепления стержня точка C не перемещается. Следовательно, и в основной системе это условие должно выполняться. Поэтому для выбранной основной системы деформационное уравнение запишем следующим образом: $u_C = 0$.

Используя принцип независимости действия сил, перемещение точки C определим как сумму удлинений стержня от действия каждой силы в отдельности (P_1, P_2, X):

$$u_C = \Delta l_{P_1} + \Delta l_{P_2} + \Delta l_X = 0. \quad (2)$$

3. *Физическая сторона задачи*. Деформации стержня выражим через усилия, используя закон Гука.

Деформация стержня от силы P_1 . Сила P_1 сжимает только участок a , следовательно

$$\Delta l_{P_1} = -\frac{P_1 a}{EA}.$$

Удлинение стержня от силы P_2 . Сила P_2 растягивает два участка стержня – участок a и участок b , поэтому

$$\Delta l_{P_2} = \frac{P_2 a}{EA} + \frac{P_2 b}{E(2A)}.$$

Удлинение стержня от усилия X . Усилие X растягивает все участки стержня:

$$\Delta l_X = \frac{Xa}{EA} + \frac{Xb}{E(2A)} + \frac{Xc}{E(3A)}.$$

Подставим значения деформаций в соотношение (2):

$$-\frac{250 \cdot 0,75}{EA} + \frac{160 \cdot 0,75}{EA} + \frac{160 \cdot 0,5}{E2A} + \frac{X \cdot 0,75}{EA} + \frac{X \cdot 0,5}{E2A} + \frac{X \cdot 0,65}{E3A} = 0.$$

После преобразований получим

$$X = \frac{250 \cdot 0,75 - 160 \cdot 0,75 - 160 \cdot 0,25}{0,75 + 0,25 + 0,217} = 22,6 \text{ кН.}$$

Из уравнения равновесия (1) определим реакцию опоры H_B :

$$H_B = -P_1 + P_2 + X = -250 + 160 + 22,6 = -67,4 \text{ кН.}$$

3. Определение продольных сил

Для определения продольных сил рассмотрим равновесие отсеченных частей стержня сечениями, проведенными в пределах каждого участка.

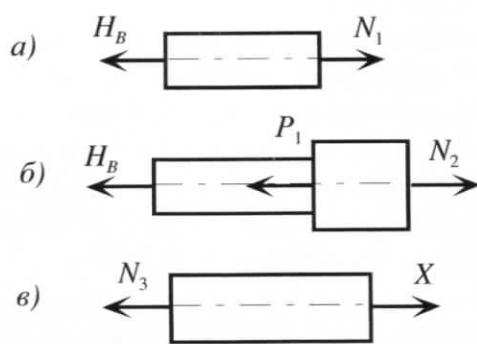


Рис. 9. Схемы отсеченных частей
рис. 9, б):

$$\sum F_x = X - N_3 = 0, N_3 = X = 22,6 \text{ кН (растяжение).}$$

По вычисленным значениям строим эпюру N (рис. 8, г).

4. Определение нормальных напряжений

Нормальные напряжения в сечениях стержня определим по формуле (3.1) [2]:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A} = -\frac{67,4 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^{-4}} = -2,25 \cdot 10^7 \text{ Па} = -22,5 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{2A} = \frac{182,6 \cdot 10^3}{2 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} = 3,04 \cdot 10^7 \text{ Па} = 30,4 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{N_3}{3A} = \frac{22,6 \cdot 10^3}{3 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} = 0,25 \cdot 10^7 \text{ Па} = 2,5 \text{ МПа.}$$

По данным значениям строим эпюру σ (рис. 8, д).

5. Определение перемещения сечений

Определим деформацию участков стержня по формуле (4.1) [2]:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 a}{EA} = \frac{-67,4 \cdot 10^3 \cdot 0,75}{2 \cdot 10^{11} \cdot 30 \cdot 10^{-4}} = -0,842 \cdot 10^{-4} \text{ м,}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 b}{E(2A)} = \frac{182,6 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} = 0,76 \cdot 10^{-4} \text{ м,}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 c}{E(3A)} = \frac{22,6 \cdot 10^3 \cdot 0,65}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} = 0,082 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Определим перемещения сечений, проведенных по границам участков (рис. 8, в).

Перемещение сечения равно алгебраической сумме удлинений участков, расположенных между сечением и заделкой.

Сечение 0–0: $u_{0-0} = 0$.

Сечение 1–1: $u_{1-1} = \Delta l_1 = -0,842 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ (сечение переместились влево).

Сечение 2–2: $u_{2-2} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0,842 \cdot 10^{-4} + 0,760 \cdot 10^{-4} = -0,082 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ (сечение переместились влево).

Сечение 3–3: $u_{3-3} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0,842 \cdot 10^{-4} + 0,76 \cdot 10^{-4} + 0,082 \cdot 10^{-4} = 0$.

Строим эпюру перемещений u (рис. 8, е).

1-й участок (левая отсеченная часть, рис. 9, а):

$$\sum F_x = N_1 - H_B = 0,$$

откуда $N_1 = H_B = -67,4 \text{ кН}$ (сжатие).

2-й участок (левая отсеченная часть, рис. 9, б):

$$\sum F_x = N_2 - H_B - P_1 = 0,$$

откуда

$$N_2 = P_1 + H_B = 250 - 67,4 = 182,6 \text{ кН (растяжение).}$$

3-й участок (правая отсеченная часть, рис. 9, в):

$$\sum F_x = X - N_3 = 0, N_3 = X = 22,6 \text{ кН (растяжение).}$$

а б
г д
ж з
к л
н о
р с
у ф
ц ч
ь ѿ
э ю

Задача 6. Расчет статически неопределенной стержневой системы

В учебнике [1] – глава 2, § 2.9; в пособии [2] – тема 6.

Условие. Данна стержневая система, состоящая из абсолютно жесткой балки (на схемах расположена горизонтально), и двух стальных стержней (на схеме 1, 2). Длины (l_1 , l_2) и площади поперечных сечений (A_1 , A_2) стержней заданы.

Требуется:

- Исходя из условия прочности стержней определить допускаемое значение нагрузки P .

Расчетное сопротивление R_y выбрать из таблицы данных.

Алфавит	a , м	b , м	l_1 , м	l_2 , м	A_1 , см ²	A_2 , см ²	α , град	R_y , МПа
	1	2	3	4	5	6	7	8
а б в	1,0	2,8	1,0	2,8	8	8	25	220
г д е ё	1,2	2,6	1,2	2,6	12	9	30	200
ж з и й	1,4	2,4	1,4	2,4	10	10	35	210
к л м	1,5	2,2	1,6	2,2	11	11	32	230
н о п	1,8	2,0	2,5	2,0	12	12	45	240
р с т	2,0	1,8	2,0	1,1	13	13	50	220
у ф х	2,2	1,6	2,2	1,6	14	14	55	200
ц ч ш щ	2,4	1,4	2,4	1,4	15	15	60	180
ъ ѿ ѿ	2,6	1,2	2,6	1,2	16	16	65	160
э ю я	2,8	1,0	2,8	1,0	17	17	70	220

Варианты расчетных схем

1,16	2,17	3,18
4,19	5,20	6,21
7,22	8,23	9,24
10,25	11,26	12,27
13,28	14,29	15,30

1. В
В с
шифр 0
данных

К.
$a, \text{м}$
1,5

2. Р
Расс
сторон
стерн
зом, им
три лин
определ
ределим

Расс

Пред

Расс

Пример решения

1. Выбор данных и изображение расчетной схемы

В соответствии с фамилией и учебным шифром (например, К. Морев, учебный шифр 09-MT-04) выбираем расчетную схему (рис. 10) и заполняем таблицу исходных данных.

K.	M	o	p	e	v	K.	M
a, м	b, м	l ₁ , м	l ₂ , м	A ₁ , см ²	A ₂ , см ²	α, град	R _y , МПа
1,5	2,2	2,5	1,1	12	8	32	230

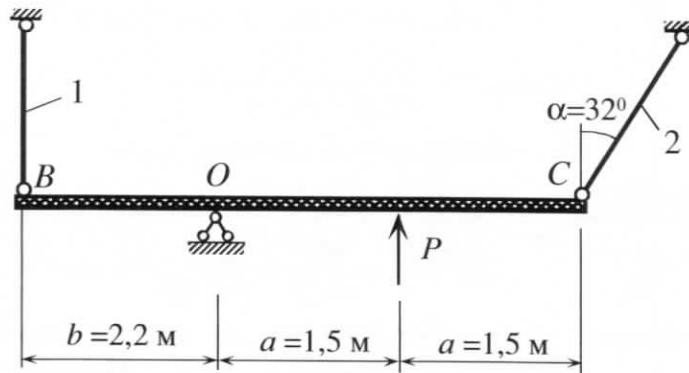


Рис. 10. Расчетная схема стержневой системы

2. Раскрытие статической неопределенности

Рассмотрим систему сил, действующих на абсолютно жесткую балку: H и V – со стороны шарнирно-неподвижной опоры; N_1 , N_2 – приложенные в точках крепления стержней 1, 2 и направленные вдоль оси стержня соответственно (рис. 11). Таким образом, имеем *четыре* неизвестных усилия. Для плоской системы сил можно составить *три* линейно независимых уравнения статики. Следовательно, степень статической неопределенности $n = 4 - 3 = 1$, т.е. заданная система является один раз статически неопределенной.

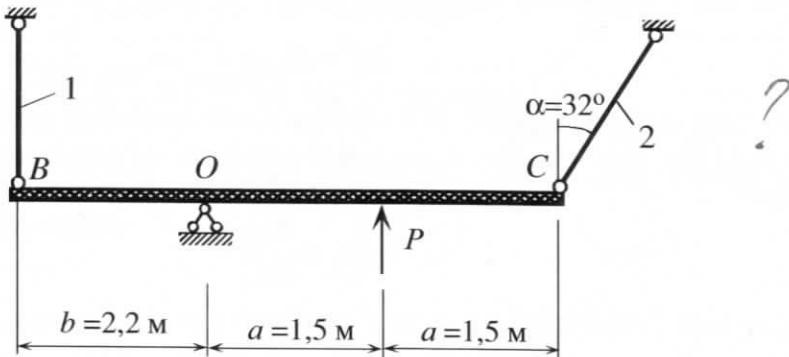


Рис. 11. Схема усилий, действующих на абсолютно жесткую балку

Рассмотрим *статическую* сторону задачи. Запишем уравнения статики:

$$\sum F_x = H + N_2 \sin \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = V + N_1 + N_2 \cos \alpha + P = 0,$$

$$\sum m_O = -N_1 b + Pa + N_2 \cos \alpha \cdot 2a = 0.$$

Преобразуем последнее уравнение:

$$2,2N_1 - 2,54N_2 = 1,5P. \quad (3)$$

Рассмотрим *геометрическую* сторону задачи – составим деформационное уравнение.

Проанализируем деформацию системы. Под действием силы P абсолютно жесткая балка, оставаясь прямой, повернется относительно шарнира O , деформируя стальные стержни (рис. 12). Вследствие малости деформаций все точки балки, в том числе и точки B и C , переместятся перпендикулярно ее продольной оси. Таким образом, точка B переместится вертикально вниз, а точка C – вертикально вверх. Из рис. 12 видно, что стержень 1 удлинился, а стержень 2 укоротился. Очевидно, что удлинение стержня 1 на схеме соответствует отрезку BB_1 . Чтобы показать на схеме укорочение наклонного стержня 2, опустим перпендикуляр из точки C_1 на первоначальную ось стержня 2. Отрезок CC_2 – это деформация (уменьшение) стержня 2.

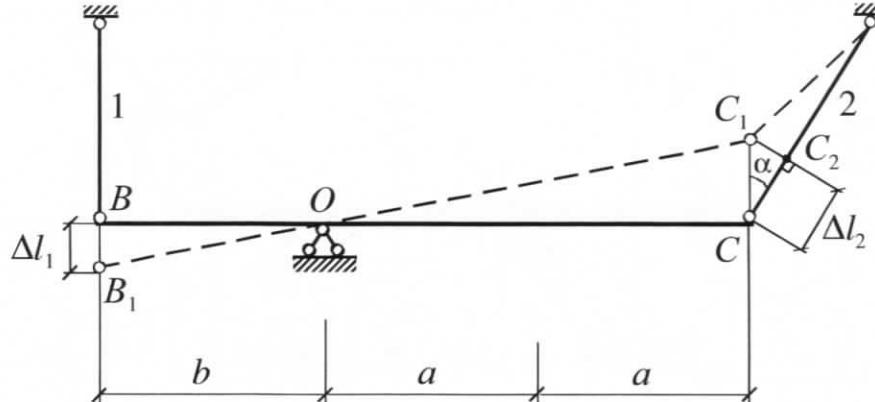


Рис. 12. Деформированный вид стержневой системы

Составим деформационное уравнение, связывающее перемещения точек B и C , из подобия треугольников OBB_1 и OCC_1 :

$$\frac{BB_1}{b} = \frac{CC_1}{2a}.$$

Из треугольника CC_1C_2 определим $CC_1 = \frac{CC_2}{\cos \alpha}$.

Так как $BB_1 = \Delta l_1$, а $CC_2 = \Delta l_2$, то

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \frac{b}{2a \cos \alpha}. \quad (4)$$

Физическая сторона задачи. Изменение длин стержней выражим через усилия по формуле (4.1) [2]. Для стержня 1, который растянут на схеме действия сил и на схеме деформаций:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}.$$

Для стержня 2, который на схеме действия сил растянут, а на схеме деформаций сжат:

$$\Delta l_2 = -\frac{N_2 l_2}{EA_2}.$$

Деформационное уравнение (4) с учетом данных замен приведем к следующему виду:

$$\frac{N_1 l_1}{EA_1} = -\frac{N_2 l_2}{EA_2} \frac{b}{2a \cos \alpha}.$$

Подставим численные значения величин и получим $N_2 = -1,75 N_1$.

Данное соотношение между усилиями подставим в уравнение равновесия (3):

$$2,2N_1 - 2,54(-1,75N_1) = 1,5P,$$

откуда получим

$$N_1 = 0,225P, \quad N_2 = -1,75(0,225P) = -0,394P. \quad (5)$$

3. Расчет на прочность

Из условия прочности на растяжение (сжатие) $\sigma_{\max} = \frac{|N|}{A} \leq R_y$ определим допускаемое усилие на стержень $|N| \leq AR_y$.

Расчет по 1-му стержню

$$|N_1| \leq A_1 R_y = 12 \cdot 10^{-4} \cdot 230 \cdot 10^6 = 276 \cdot 10^3 \text{ Н} = 276 \text{ кН.}$$

Из соотношений (5) определим значение нагрузки P :

$$P \leq \frac{|N_1|}{0,225} = \frac{276}{0,225} = 1230 \text{ кН.}$$

Расчет по 2-му стержню

$$|N_2| \leq A_2 R_y = 8 \cdot 10^{-4} \cdot 230 \cdot 10^6 = 184 \cdot 10^3 \text{ Н} = 184 \text{ кН.}$$

Учитывая (5), получим $P \leq \frac{|N_2|}{0,394} = \frac{184}{0,394} = 467 \text{ кН.}$

Из двух условий определяем максимально допустимое значение внешней нагрузки на заданную конструкцию $P_{\text{доп}} \leq P_{\min} = 467 \text{ кН.}$

4. Проверка прочности

При нагрузке $P = P_{\text{доп}} = 467 \text{ кН}$ определим напряжения в стержнях 1 и 2 и проверим их прочность.

Из соотношений (5) получим:

$$N_1 = 0,225 \cdot 467 = 105 \text{ кН,}$$

$$N_2 = -0,394 \cdot 467 = -184 \text{ кН.}$$

При этом напряжения равны:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{105 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} = 8,76 \cdot 10^7 \text{ Па} = 87,6 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-184 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} = -23 \cdot 10^7 \text{ Па} = -230 \text{ МПа.}$$

Так как $|\sigma|_{\max} = 230 \text{ МПа} = R_y$, условие прочности выполняется, значит, допускаемая нагрузка определена верно.

3. Напряженно-деформированное состояние в точке тела

В учебнике [1] – глава 3, § 3.1–3.4; в пособии [2] – тема 7.

Задача 7. Анализ плоского напряженного состояния

Условие. Из пластины, которая находится в однородном плоском напряженном состоянии, вырезан элемент в форме параллелепипеда с размерами $a \times b \times t$. Равновесие элемента обеспечивается нормальными (P_x, P_y) и касательными усилиями (Q_x, Q_y) – реакциями со стороны отброшенной части пластины (рис. 13).

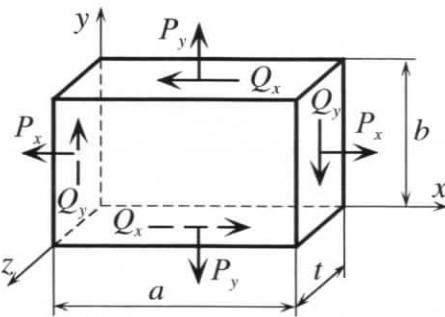


Рис. 13. Общая расчетная схема элемента

Требуется:

- Вычислить нормальные и касательные напряжения, действующие на гранях параллелепипеда.
- Определить главные напряжения и положение главных площадок.
- Определить экстремальные касательные напряжения и положение площадок, на которых они действуют.
- Определить нормальные и касательные напряжения, действующие на наклонной площадке.

Алфавит	P_x , кН	P_y , кН	Q_y , кН	t , мм	a , мм	b , мм	α , град
	1	2	3	4	5	6	7
<i>а б в</i>	1	10*	4*	8	5	5	30
<i>г д е ё</i>	2*	9	3	9	6	6	35
<i>ж з и ї</i>	3	8*	2*	10	9	7	40
<i>к л м</i>	4*	7	10	7	8	9	50
<i>н о п</i>	5	6*	9*	6	7	8	45
<i>р с т</i>	6*	5	8	5	10	7	35
<i>у ф х</i>	7	4*	7*	4	9	6	30
<i>ц ч ш щ</i>	8*	3	6	6	8	5	25
<i>ъ ѿ ѿ</i>	9	2*	5*	8	7	9	20
<i>э ю я</i>	10*	1	4	10	6	10	40

Примечание. В таблице знак (*) означает, что усилие на расчетной схеме необходимо направить в сторону, противоположную указанной на рис. 13.

Пример решения

1. Выбор данных и изображение расчетной схемы

В соответствии с именем и фамилией (например, И. Иванов) заполняем таблицу исходных данных.

И.	и	в	а	н	о	в
1	2	3	4	5	6	7
P_x , кН	P_y , кН	Q_y , кН	t , мм	a , мм	b , мм	α , град
3	8*	4*	8	7	8	30

Изобразим расчетную схему элемента с указанием числовых значений усилий и размеров. В таблице исходных данных значение усилий P_y и Q_y отмечено звездочкой, поэтому их направление изменяем на противоположное (рис. 14).

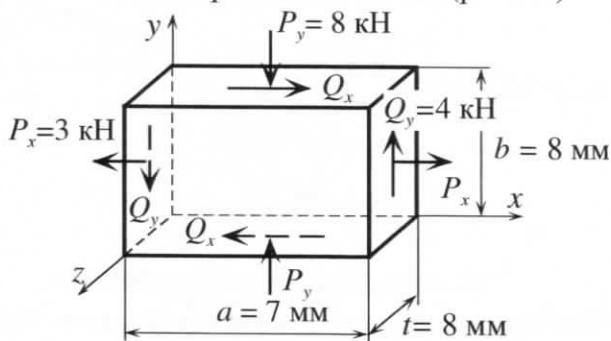


Рис. 14. Схема нагружения элемента

2. Определение нормальных и касательных напряжений, действующих на граниях элемента

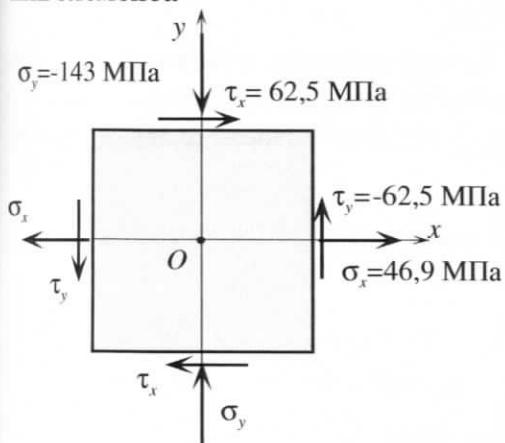


Рис. 15. Напряженное состояние в точке O

Считаем, что напряжения по граням параллелепипеда распределены равномерно. Следовательно, их значение определим как отношение усилия к площади соответствующей грани:

$$\sigma_x = \frac{P_x}{bt} = \frac{3 \cdot 10^3}{8 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = 4,69 \cdot 10^7 \text{ Па} = 46,9 \text{ МПа},$$

$$\sigma_y = \frac{P_y}{at} = -\frac{8 \cdot 10^3}{7 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = -14,3 \cdot 10^7 \text{ Па} = -143 \text{ МПа},$$

$$\tau_y = \frac{Q_y}{bt} = -\frac{4 \cdot 10^3}{8 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = -6,25 \cdot 10^7 \text{ Па} = -62,5 \text{ МПа}.$$

По закону парности касательных напряжений, используя формулу (7.8) [2], получим

$$\tau_x = -\tau_y = 62,5 \text{ МПа}.$$

На рис. 15 показан малый элемент, вырезанный вокруг произвольной точки параллелепипеда параллельно его граням, и соответствующие напряжения.

3. Определение главных напряжений и главных площадок

Главные напряжения определим по формуле (7.18) [2]:

$$\sigma_{\max \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_y^2},$$

$$\sigma_{\max \min} = \frac{46,9 + (-143)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{[46,9 - (-143)]^2 + 4(-62,5)^2} = -48,1 \pm 114,$$

откуда $\sigma_{\max} = -48,1 + 114 = 65,9 \text{ МПа}$, $\sigma_{\min} = -48,1 - 114 = -162 \text{ МПа}$.

Вычислим угол наклона главной площадки (где действует σ_{\max}) к оси x по формуле (7.16) [2]:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = -\frac{\tau_y}{\sigma_{\max} - \sigma_y} = -\frac{-62,5}{65,9 - (-143)} = 0,299,$$

следовательно $\alpha_{\max} = \arctg 0,299 = 17^\circ$ (против часовой стрелки от оси x).

На рис. 16 показано положение главных площадок и главных напряжений.

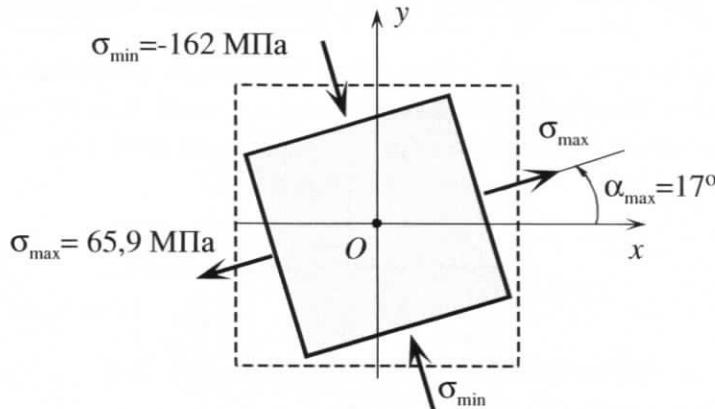


Рис. 16. Положение главных площадок

4. Определение экстремальных касательных напряжений

Экстремальные касательные напряжения определим по формуле (7.22) [2]:

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \pm \frac{65,9 - (-162)}{2} = \pm 114 \text{ МПа}.$$

Соответственно $\tau_{\max} = 114 \text{ МПа}$, $\tau_{\min} = -114 \text{ МПа}$.

Площадки, на которых действуют экстремальные касательные напряжения, повернуты относительно главных на 45° [1]. Следовательно, их ориентация относительно оси x определяется углом $\alpha_t = \alpha_{\max} + 45^\circ = 17^\circ + 45^\circ = 62^\circ$ (рис. 17). Нормальные напряжения, действующие на данных площадках:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{46,9 + (-143)}{2} = -48,1 \text{ МПа}.$$

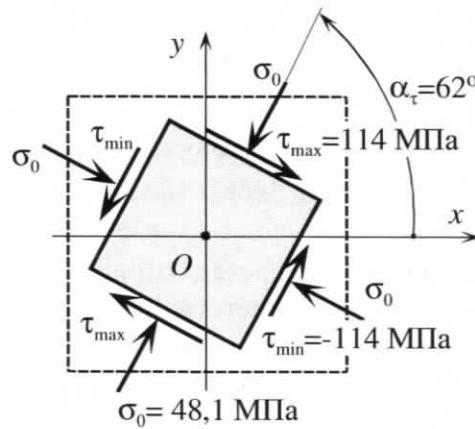


Рис. 17. Положение экстремальных касательных напряжений

5. Определение нормальных и касательных напряжений на наклонной площадке

Определим напряжения, действующие на наклонной площадке по формулам (7.9), (7.11) [2]. Угол наклона площадки $\alpha = 30^\circ$ (рис. 18).

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_y \sin 2\alpha,$$

$$\sigma_\alpha = 46,9 \cos^2 30^\circ + (-143) \sin^2 30^\circ - (-62,5) \sin(2 \cdot 30^\circ) = 53,6 \text{ МПа};$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_y \cos 2\alpha,$$

$$\tau_\alpha = \frac{46,9 - (-143)}{2} \sin^2(2 \cdot 30^\circ) + (-62,5) \cos(2 \cdot 30^\circ) = 51,0 \text{ МПа}.$$

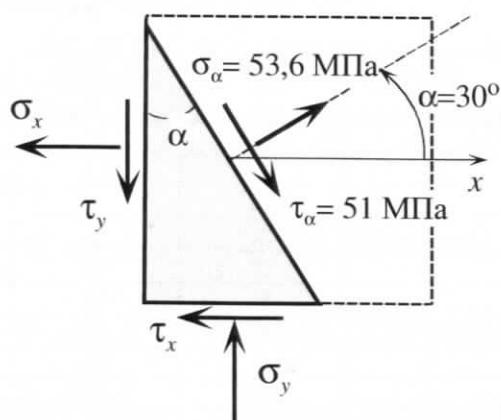
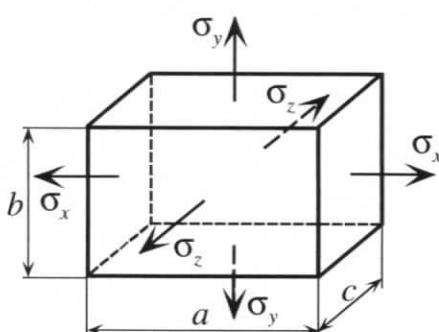


Рис. 18. Напряжения, действующие на наклонной площадке

Задача 8. Анализ деформированного состояния параллелепипеда

Условие. На гранях прямоугольного параллелепипеда с размерами $a \times b \times c$ действуют равномерно распределенные нормальные напряжения σ_x , σ_y , σ_z .



Требуется определить:

1. Относительные деформации по направлению осей x , y , z и удлинение ребер параллелепипеда.
2. Относительное и абсолютное изменение объема.
3. Удельную и полную потенциальную энергию деформации параллелепипеда.

Принять модуль упругости материала $E = 1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $v = 0,32$.

Алфавит	a , см	b , см	c , см	σ_x , МПа	σ_y , МПа	σ_z , МПа
	1	2	3	4	5	6
а б в	4	10	14	40	120	30
г д е ё	5	9	13	50	-115	-35
ж з и ї	6	8	10	-45	110	40
к л м	7	7	11	-55	-105	-45
н о п	8	6	12	60	90	50
р с т	9	8	9	-65	-95	-65
у ф х	10	4	8	70	100	60
ц ч и ј	11	6	7	65	-85	-55
ъ ѿ ѿ	12	8	6	-60	80	70
э ю я	4	10	5	55	-75	-75

Пример решения

1. Выбор данных и изображение расчетной схемы

В соответствии с фамилией (например, А. Сидоров) заполняем таблицу исходных данных.

А.	С	и	д	о	р	ов
1	2	3	4	5	6	
a , см	b , см	c , см	σ_x , МПа	σ_y , МПа	σ_z , МПа	
4	8	10	50	90	-65	

Изобразим расчетную схему параллелепипеда, соблюдая масштаб длин, с указанием числовых значений напряжений и размеров. Учитывая, что в таблице исходных данных значение напряжения σ_z отрицательное, направление этого напряжения изменим на противоположное (рис. 19).

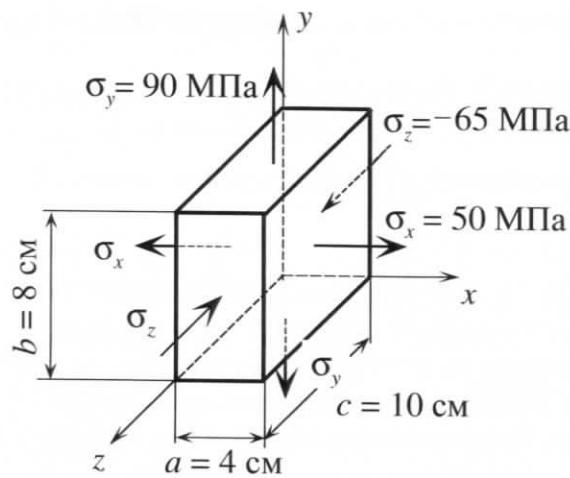


Рис. 19. Расчетная схема параллелепипеда

2. Определение деформаций граней параллелепипеда

Определим относительные деформации по направлению соответствующих осей по формулам (7.26)–(7.28) [2]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - v(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{1 \cdot 10^5} [50 - 0,32(90 - 65)] = 4,2 \cdot 10^{-4}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - v(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{1 \cdot 10^5} [90 - 0,32(50 - 65)] = 9,5 \cdot 10^{-4}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - v(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{1 \cdot 10^5} [-65 - 0,32(50 + 90)] = -11 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Вычислим абсолютные деформации граней параллелепипеда:

$$\Delta a = \varepsilon_x a = 4,2 \cdot 10^{-4} \cdot 4 = 1,68 \cdot 10^{-3} \text{ см},$$

$$\Delta b = \varepsilon_y b = 9,5 \cdot 10^{-4} \cdot 8 = 7,60 \cdot 10^{-3} \text{ см},$$

$$\Delta c = \varepsilon_z c = -11 \cdot 10^{-4} \cdot 10 = -11,0 \cdot 10^{-3} \text{ см}.$$

3. Определение изменения объема параллелепипеда

Относительное изменение объема параллелепипеда определим по формуле (7.30) [2]:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (4,2 + 9,5 - 11,0) \cdot 10^{-4} = 2,7 \cdot 10^{-4}.$$

Вычислим абсолютное изменение объема:

$$\Delta V = \varepsilon_V V = 2,7 \cdot 10^{-4} (4 \cdot 8 \cdot 10) = 8,64 \cdot 10^{-2} \text{ см}^3.$$

4. Определение потенциальной энергии деформации параллелепипеда

Удельную потенциальную энергию деформации определим по формуле (7.31) [2]:

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z) = \frac{1}{2} [50 \cdot 4,2 + 90 \cdot 9,5 - 65(-11,0)] \cdot 10^6 \cdot 10^{-4} = 8,9 \cdot 10^4 \text{ Дж/м}^3.$$

Полную потенциальную энергию деформации вычислим по формуле (7.33) [2]:

$$U = uV = 8,9 \cdot 10^4 (4 \cdot 8 \cdot 10) \cdot 10^{-6} = 28,5 \text{ Дж.}$$

4. Сдвиг. Практические методы расчета соединений

Задача 9. Расчет заклепочного соединения

В учебнике [1] – глава 4 § 4.1; в пособии [2] – тема 8.

Условие. Для заклепочного соединения заданы вариант соединения листов и схема расположения заклепок.

Требуется:

1. Изобразить расчетную схему заклепочного соединения.
2. Построить эпюры продольных сил в листах и накладках.
3. Определить допускаемую силу P на заклепочное соединение.

Принять расчетное сопротивление для заклепок на срез $R_s = 120$ МПа, на смятие $R_p = 300$ МПа; расчетное сопротивление для листов и накладок $R_y = 200$ МПа.

Алфавит	Схема расположения заклепок	Диаметр заклепок d , мм	Толщина, мм	
			t_1	t_2
	1	2	3	4
а б в	3, 4, 5	10, 12, 14	10, 12, 14	10, 8, 12
г д е ё	1, 2, 3, 4	12, 14, 16, 18	20, 18, 16, 14	10, 12, 14, 16
ж з и ї	3, 4, 5, 1	16, 18, 20, 16	16, 14, 12, 10	14, 16, 18
к л м	5, 1, 2	14, 12, 10	10, 14, 16	14, 12, 10
н о п	3, 4, 5	16, 10, 8	10, 12, 16	14, 10, 8
р с т	1, 2, 3	8, 10, 12	18, 20, 22	6, 8, 10
у ф х	3, 4, 5	12, 14, 16	10, 12, 14	10, 12, 14
ц ч ш ѿ	5, 1, 2, 3	14, 16, 18, 20	12, 14, 16, 18	10, 12, 14, 16
ъ ѿ ѿ	2, 3, 4	18, 20, 22	16, 18, 20	12, 10, 8
э ю я	4, 5, 1	18, 16, 14	18, 16, 14	10, 8, 6

Примечания. 1. Если в столбце указано несколько чисел, то каждое из них соответствует положению буквы алфавита в первом столбце таблицы.

2. Ширина листов b определяется по диаметру заклепок d в соответствии со схемой расположения заклепок.

3. Для вариантов соединений 7–18 схема расположения заклепок указана по одну сторону от стыка листов.

1- 6

7-12

P

13-18

P

19-24

0,

0,

25-30

P

$P/$

1. Въ

По и

их в табл

Схема ра

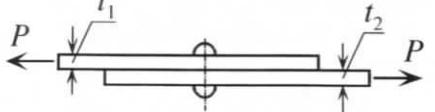
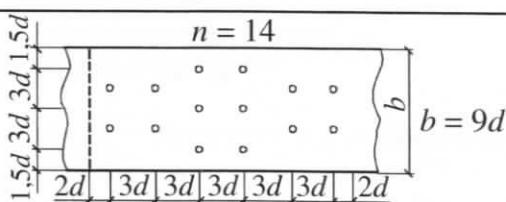
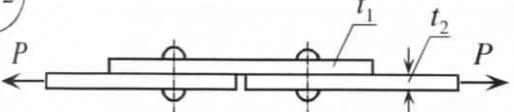
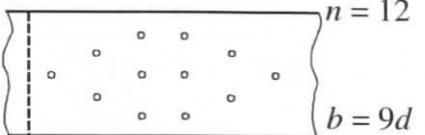
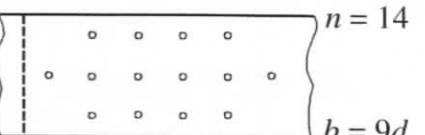
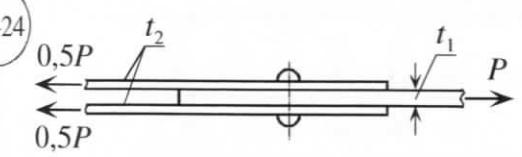
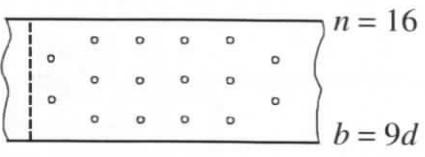
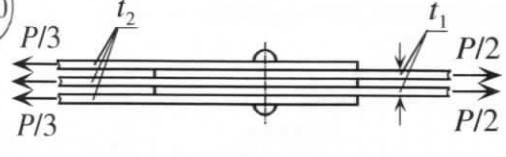
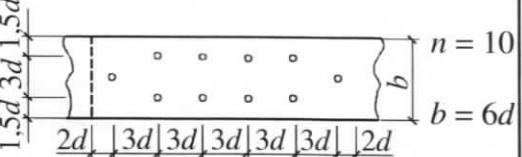
В со
тов № 15

Изоб

единий

Число ря

Варианты расчетных схем

Варианты соединений	Схемы размещения заклепок
1-6 	1 
7-12 	2 
13-18 	3 
19-24 	4 
25-30 	5 

Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По имени и фамилии (например, М. Попов) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу.

М.	П	о	п	ов
1	2	3	4	
Схема расположения заклепок	$d, \text{мм}$	$t_1, \text{мм}$	$t_2, \text{мм}$	
2	16	12	14	

В соответствии с учебным шифром (10-МС-15) выбираем вариант соединения листов № 15 (рис. 20, а).

Изобразим расчетную схему соединения в двух видах: вид спереди – по варианту соединений листов (рис. 20, а) и вид сверху – по схеме расположения заклепок (рис. 20, б). Число рядов заклепок на обеих схемах должно соответствовать виду сверху.

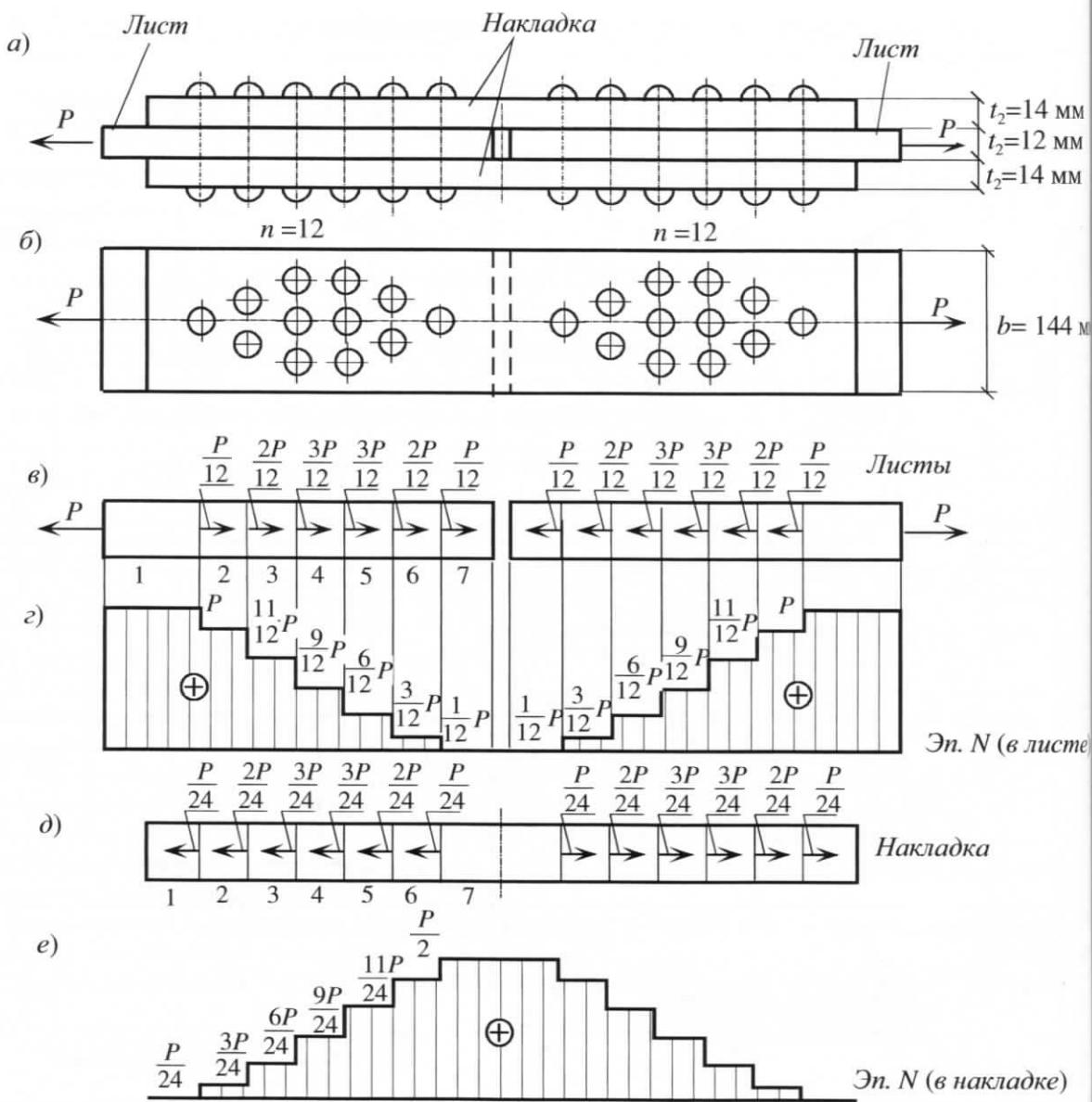


Рис. 20. Расчетные схемы и эпюры N в листах и накладке

2. Определение продольных сил в листах и накладках

Считаем, что все заклепки нагружены одинаково. На каждую заклепку со стороны листа действует усилие P_1 :

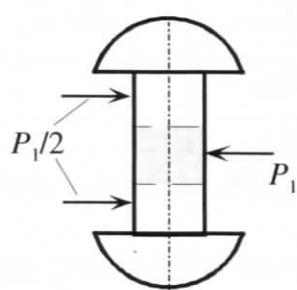


Рис. 21. Схема нагружения заклепки

$$P_1 = \frac{P}{n} = \frac{P}{12},$$

а одна накладка действует с усилием в два раза меньше $P_1 / 2$ (рис. 21).

Для определения продольных сил изобразим расчетные схемы листов (рис. 20, *в*) и накладки (рис. 20, *д*), заменив действие заклепок соответствующими усилиями.

Учитывая симметрию нагружения, рассмотрим один лист – левый. На расчетной схеме выделим семь участков и определим продольные силы, действующие на каждом из них:

$$N_1 = P, \quad N_2 = \frac{11}{12}P, \quad N_3 = \frac{9}{12}P, \quad N_4 = \frac{6}{12}P, \quad N_5 = \frac{3}{12}P, \quad N_6 = \frac{1}{12}P, \quad N_7 = 0.$$

Построим эпюру N в листе (рис. 20, ε).

По расчетной схеме накладки определим продольные силы на семи участках:

$$N_1 = 0, \quad N_2 = \frac{1}{24}P, \quad N_3 = \frac{3}{24}P, \quad N_4 = \frac{6}{12}P, \quad N_5 = \frac{9}{12}P, \quad N_6 = \frac{11}{12}P, \quad N_7 = \frac{P}{2}.$$

Построим эпюру N в накладке (рис. 20, e), учитывая симметрию нагружения.

3. Определение допускаемой силы

Допускаемую силу P на соединение определим из расчета на прочность заклепки, листа и накладки.

1. Из условия прочности заклепок по срезу допускаемая сила по формуле (8.9) [2] равна

$$P \leq \frac{R_s \pi d^2 n k}{4} = \frac{120 \cdot 10^6 \cdot 3,14 (16 \cdot 10^{-3})^2 12 \cdot 2}{4} = 5,79 \cdot 10^5 \text{ Н} = 579 \text{ кН},$$

где d – диаметр заклепки; n – число заклепок; k – число плоскостей среза ($k = 3 - 1$, где 3 – число листов, соединяемых заклепкой).

2. Из условия прочности заклепок по смятию допускаемая сила по формуле (8.11) [2] равна

$$P \leq R_p d n \sum t_{\min} = 300 \cdot 10^6 \cdot 16 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 12 \cdot 10^{-3} = 6,91 \cdot 10^5 \text{ Н} = 691 \text{ кН},$$

где $\sum t_{\min}$ – минимальная суммарная толщина листов, сминающих заклепки в одном направлении (в нашем случае $\sum t_{\min} = 12 \text{ мм}$).

3. Из условия прочности листа на растяжение $\sigma_{\max} = \frac{|N|}{A_h} \leq R_y$ определим допускаемое значение усилия N :

$$N \leq R_y A_h, \quad (6)$$

где A_h – площадь сечения, ослабленного заклепочными отверстиями.

$$A_h = t(b - n_1 d),$$

где t – толщина листа; n_1 – число заклепочных отверстий в расчетном сечении листа; b – ширина листа.

Расчет проведем по наиболее нагруженным участкам: 1, 2, 3-му (см. эпюру N , рис. 20, ε). Определим площадь ослабленных сечений на этих участках

$$A_h^{(1)} = 12(144 - 1 \cdot 16) = 1540 \text{ мм}^2 = 15,4 \text{ см}^2,$$

$$A_h^{(2)} = 12(144 - 2 \cdot 16) = 1340 \text{ мм}^2 = 13,4 \text{ см}^2,$$

$$A_h^{(3)} = 12(144 - 3 \cdot 16) = 1150 \text{ мм}^2 = 11,5 \text{ см}^2.$$

В соответствии с формулой (6) получим расчетные значения усилий.

На первом участке $N_1 \leq R_y A_h^{(1)} = 200 \cdot 10^6 \cdot 15,4 \cdot 10^{-4} = 3,08 \cdot 10^5 \text{ Н} = 308 \text{ кН}$. Так как $N_1 = P$, то $P \leq 308 \text{ кН}$.

На втором участке $N_2 \leq R_y A_h^{(2)} = 200 \cdot 10^6 \cdot 13,4 \cdot 10^{-4} = 2,68 \cdot 10^5 \text{ Н} = 268 \text{ кН}$.

$N_2 = \frac{11}{12}P$, отсюда $P \leq \frac{12}{11}268 = 292 \text{ кН}$.

На третьем участке $N_3 = \frac{9}{12}P \leq R_y A_h^{(3)} = 200 \cdot 10^6 \cdot 11,5 \cdot 10^{-4} = 2,23 \cdot 10^5 \text{ Н} = 230 \text{ кН}$,

откуда $P \leq \frac{12}{9}230 = 307 \text{ кН}$.

4. Суммарная толщина накладок $2t_2 = 28$ мм больше толщины листа $t_1 = 12$ мм, поэтому при одинаковой нагрузке эти элементы заведомо прочнее листа, и в данном случае расчет на прочность накладок не проводим.

Следовательно, допускаемую нагрузку выберем из пяти значений, полученных из расчета на прочность заклепок и листа:

$$P \leq 579 \text{ кН},$$

$$P \leq 691 \text{ кН},$$

$$P \leq 308 \text{ кН},$$

$$P \leq 292 \text{ кН},$$

$$P \leq 307 \text{ кН}.$$

Окончательно получим $P_{\text{доп}} \leq 292$ кН.

Задача 10. Расчет сварных соединений

В учебнике [1] – глава 4, § 4.2; в пособии [2] – тема 8.

Условие. Дано сварное соединение, нагруженное силами P .

Требуется:

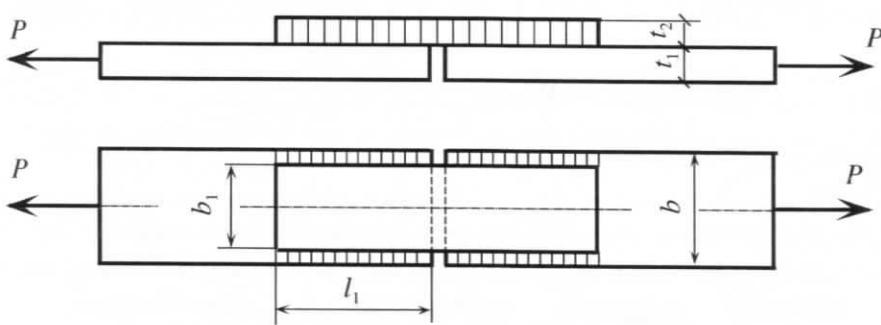
1. Определить необходимую толщину листа t_1 и накладки t_2 .
2. Рассчитать длину сварного шва $l_{\text{шв}}$.

Расчетное сопротивление сварного шва на сдвиг принять $R_{ws} = 110$ МПа, а листов и накладок $R_y = 200$ МПа. Из условия размещения сварного шва ширину накладки b_1 принять на три сантиметра меньше ширины листа b : $b_1 = b - 3$.

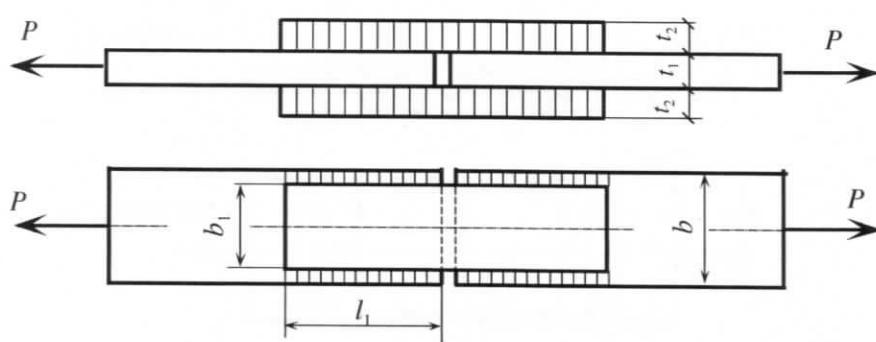
Алфавит	Вариант соединения	P , кН		b , см
		1	2	
а б в	4	400	22	
г д е ё	3	500	20	
ж з и ѹ	2	700	24	
к л м	1	600	26	
н о п	2	800	28	
р с т	3	900	30	
у ф х	4	1000	29	
ц ч ш щ	1	1100	27	
ъ ы ь	4	1200	25	
э ю я	3	1300	23	
а б в	2	1400	21	
г д е ё	1	1500	19	

Варианты соединений

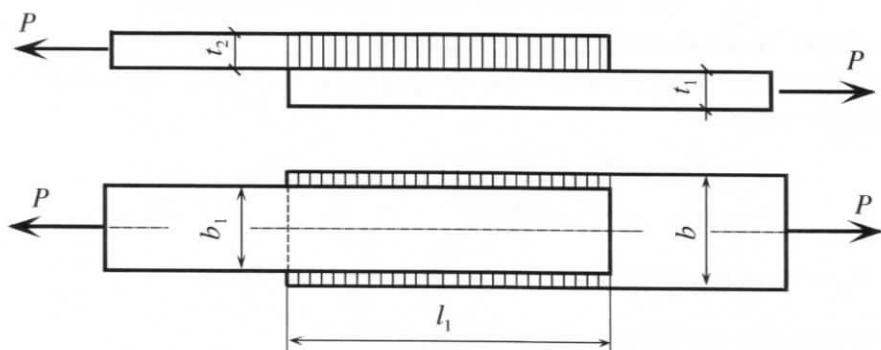
1



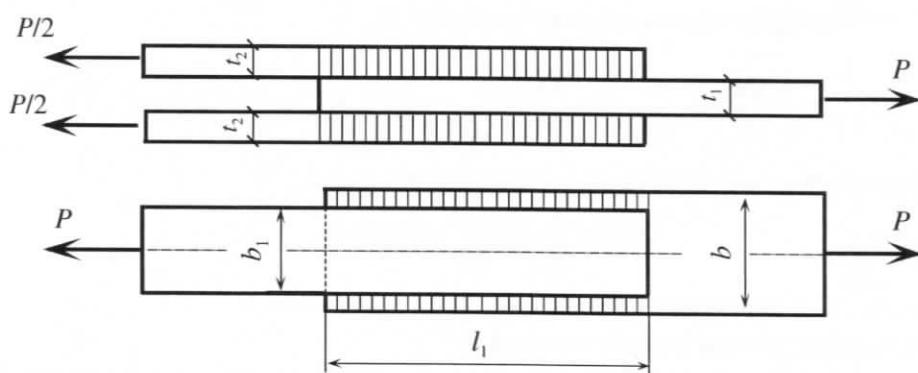
2



3



4



Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По имени и фамилии (например, П. Ивлев) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу.

П.	И	в	лев
1	2	3	
Вариант соединений	P, kH	$b, \text{см}$	
2	700	22	

Расчетную схему (рис. 22) изображаем в масштабе с указанием известных размеров и усилий. Ширину накладки определяем в соответствии с условием: $b_1 = b - 3 = 22 - 3 = 19 \text{ см}$.

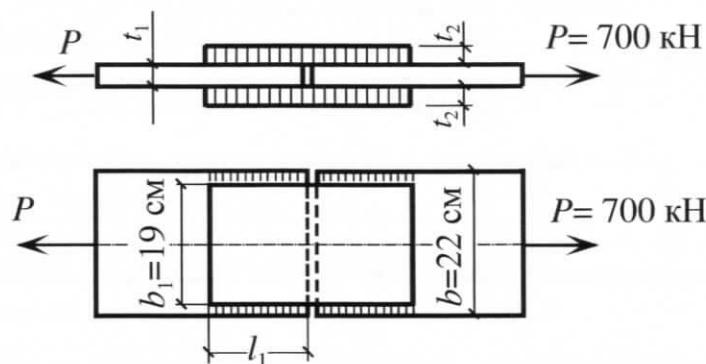


Рис. 22. Расчетная схема сварного соединения

2. Определение толщины листа и накладки

Из условия прочности на растяжение по формуле (3.4) [2] определим площадь поперечного сечения листа

$$A_{\text{л}} \geq \frac{N_{\text{л}}}{R_y} = \frac{P}{R_y} = \frac{700 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 35 \text{ см}^2.$$

Площадь $A_{\text{л}} = bt_1$. Следовательно, $t_1 = \frac{A_{\text{л}}}{b} \geq \frac{35}{22} = 1,59 \text{ см}$.

Принимаем стандартную толщину листа $t_1 = 16 \text{ мм}$.

Аналогичный расчет проведем для накладки. Определим площадь, учитывая, что из условия симметрии продольная сила в накладке $N_{\text{н}} = \frac{P}{2}$:

$$A_{\text{н}} \geq \frac{N_{\text{н}}}{R_y} = \frac{P}{2R_y} = \frac{700 \cdot 10^3}{2 \cdot 200 \cdot 10^6} = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 17,5 \text{ см}^2.$$

По величине площади определим толщину накладки

$$t_2 = \frac{A_{\text{н}}}{b_1} \geq \frac{17,5}{19} = 0,92 \text{ см}.$$

Принимаем стандартную толщину накладки $t_2 = 10 \text{ мм}$.

3. Определение длины сварного шва

Из условия прочности сварного шва на срез, определяемого по формуле (8.16) [2]:

$$\tau_{\text{шв}} = \frac{P}{0,7h_{\text{шв}}l_{\text{шв}}} \geq R_{ws},$$

определим общую расчетную длину сварного шва:

$$l_{\text{шв}} \geq \frac{P}{0,7h_{\text{шв}}R_{ws}}.$$

Высоту шва примем равной толщине накладки: $h_{\text{шв}} = t_2 = 10$ мм и получим

$$l_{\text{шв}} \geq \frac{700 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 110 \cdot 10^6} = 0,909 \text{ м} = 90,9 \text{ см.}$$

Усилие P по одну сторону от стыка листов удерживают четыре шва длиной l_1 (см. рис. 22).

Для учета непровара с каждого конца шва добавляют к расчетной длине по 0,5 см.

Определим проектный размер накладок

$$l_1 = \frac{l_{\text{шв}}}{4} + 1 = \frac{90,9}{4} + 1 = 23,7 \text{ см} = 237 \text{ мм.}$$

5. Геометрические характеристики сечений

Задача 11. Расчет моментов инерции сечения, имеющего две оси симметрии
В учебнике [1] – § 5.1–5.3; в пособии [2] – тема 9.

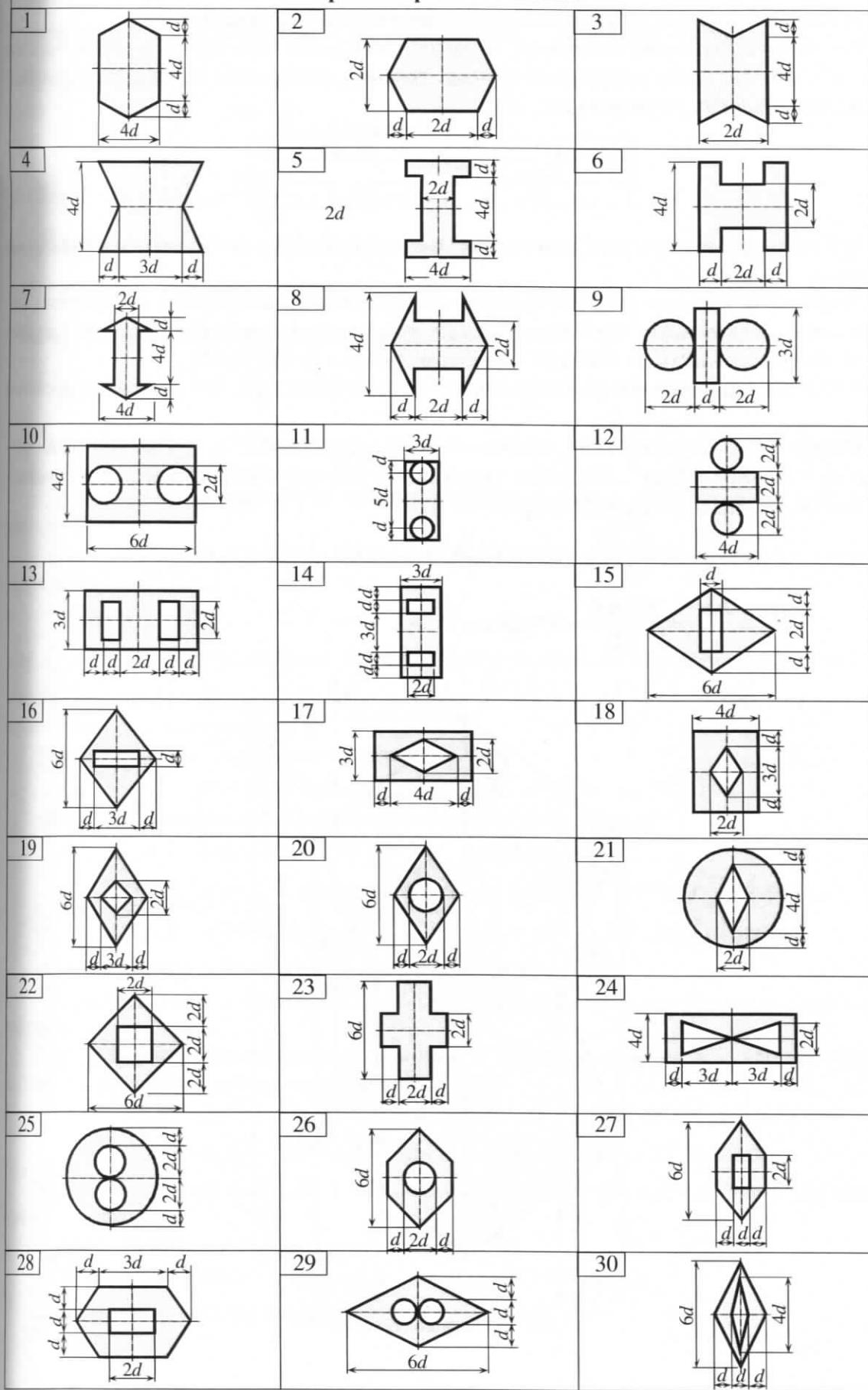
Условие. Дано сечение с двумя осями симметрии.

Требуется:

1. Начертить сечение в масштабе.
2. Разбить сечение на простые фигуры, определить их площади и моменты инерции относительно собственных центральных осей.
3. Определить главные центральные моменты инерции всего сечения.

Алфавит	d , см
а б в	6
г д е ё	7
ж з и й	8
к л м	9
н о п	10
р с т	11
у ф х	12
ц ч и и ў	13
ъ ы ь	14
э ю я	15

Варианты расчетных схем



Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение заданного сечения

По имени и фамилии (например, П. Ивлев) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу. По шифру выбираем вариант сечения. Изобразим сечение в масштабе с указанием заданных размеров (рис. 23).

П.	Ивлев
d , см	
10	

2. Разбивка сечения на простые фигуры, определение их площади и моментов инерции

Разобьем сечение на простые фигуры таким образом, чтобы моменты инерции относительно собственных осей (проходящих через центры тяжести простой фигуры) можно было вычислить по стандартным формулам (9.13)–(9.24) [2].

Наиболее рациональное разбиение представлено на рис. 23. Все размеры приведены в см.

Фигура № 1 – *прямоугольник*: высота – $h_1 = 30$ см, основание $b_1 = 30$ см. Площадь фигуры $A_1 = 30 \cdot 30 = 900$ см². Моменты инерции относительно собственных центральных осей вычислим по формулам (9.13) [2]:

$$J_{z_1} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{30 \cdot 30^3}{12} = 67\,500 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_1} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{30 \cdot 30^3}{12} = 67\,500 \text{ см}^4.$$

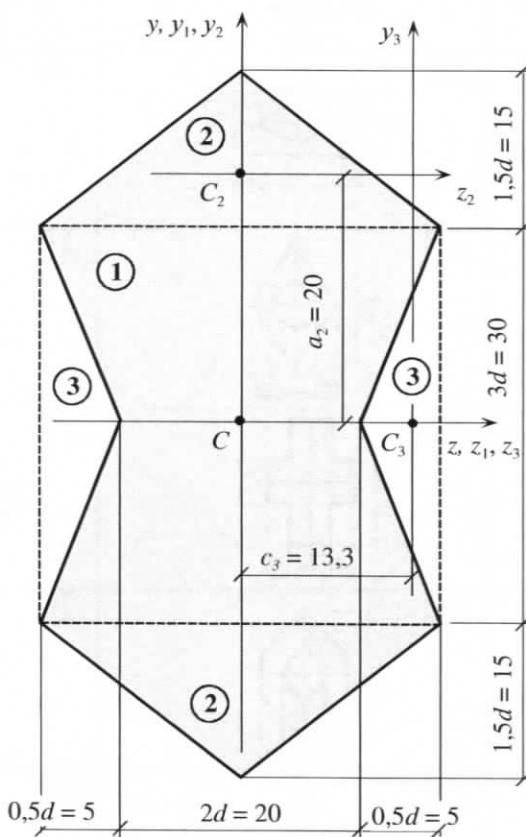


Рис. 23. Заданное сечение

Две симметричные фигуры № 2 – равнобедренные треугольники: высота $h_2 = 15$ см, основание $b_2 = 30$ см. Площадь $A_2 = \frac{15 \cdot 30}{2} = 225$ см². Моменты инерции относительно собственных центральных осей получим по формулам (9.14), (9.15) [2]:

$$J_{z_2} = \frac{b_2 h_2^3}{36} = \frac{30 \cdot 15^3}{36} = 2810 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_2} = \frac{h_2 b_2^3}{48} = \frac{15 \cdot 30^3}{48} = 8440 \text{ см}^4.$$

Две симметричные фигуры № 3 (вырезы из фигуры 1) – равнобедренные треугольники: высота $h_3 = 5$ см, основание $b_3 = 30$ см. Площадь $A_3 = \frac{5 \cdot 30}{2} = 75$ см². Моменты инерции относительно собственных центральных осей:

$$J_{z_3} = \frac{h_3 b_3^3}{48} = \frac{5 \cdot 30^3}{48} = 2810 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_3} = \frac{b_3 h_3^3}{36} = \frac{30 \cdot 5^3}{36} = 104 \text{ см}^4.$$

3. Определение моментов инерции простых фигур относительно центральных осей

Для определения моментов инерции относительно центральных осей y и z используем формулы (9.7) [2]:

$$J_z = J_{z_i} + a_i^2 A_i, \quad J_y = J_{y_i} + c_i^2 A_i, \quad (7)$$

где J_{z_i} , J_{y_i} – моменты инерции простых фигур относительно собственных осей; a_i – расстояние между собственной осью z_i и центральной z ; c_i – расстояние между собственной осью y_i и центральной y .

Расстояния a_i и c_i определим по чертежу:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 20 \text{ см}, \quad a_3 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 13,3 \text{ см}.$$

Используя формулы (7), вычислим моменты инерции фигур:

$$J_z^{(1)} = J_{z_1} = 67500 \text{ см}^4, \quad J_y^{(1)} = J_{y_1} = 67500 \text{ см}^4;$$

$$J_z^{(2)} = J_{z_2} + a_1^2 A_1 = 2810 + 20^2 \cdot 225 = 92800 \text{ см}^4, \quad J_y^{(2)} = J_{y_2} = 8440 \text{ см}^4;$$

$$J_z^{(3)} = J_{z_3} = 2810 \text{ см}^4, \quad J_y^{(3)} = J_{y_3} + c_3^2 A_3 = 104 + 13,3^2 \cdot 75 = 13400 \text{ см}^4.$$

4. Определение главных моментов инерции сечения

Так как оси y и z – оси симметрии, они являются главными центральными осями сечения.

Определим главные центральные моменты инерции сечения как алгебраическую сумму моментов инерции простых фигур:

$$J_z = J_z^{(1)} + 2J_z^{(2)} - 2J_z^{(3)} = 67500 + 2 \cdot 92800 - 2 \cdot 2810 = 247000 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_y^{(1)} + 2J_y^{(2)} - 2J_y^{(3)} = 67500 + 2 \cdot 8440 - 2 \cdot 13400 = 57600 \text{ см}^4.$$

Моменты инерции фигур № 3 из суммы вычитаются, так как они являются вырезами из фигуры № 1.

Окончательно получим:

максимальный момент инерции $J_{\max} = J_z = 247000 \text{ см}^4$;

минимальный момент инерции $J_{\min} = J_y = 57600 \text{ см}^4$.

Задача 12. Расчет моментов инерции сечения, имеющего одну ось симметрии

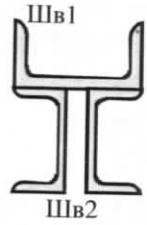
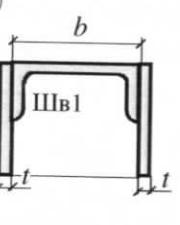
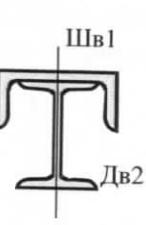
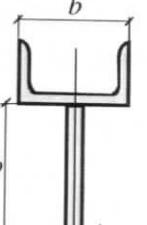
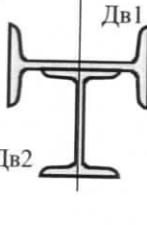
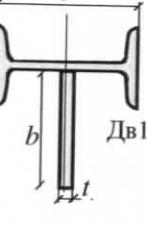
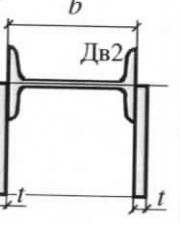
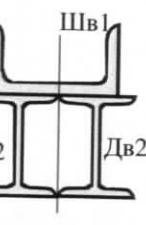
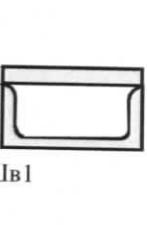
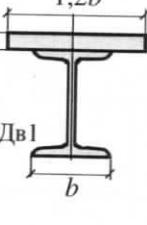
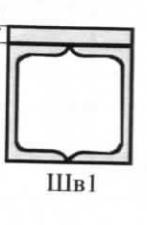
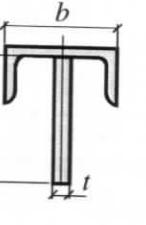
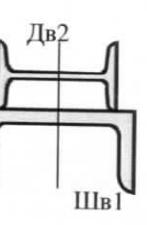
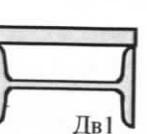
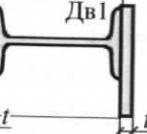
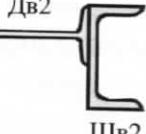
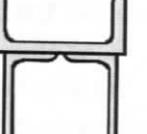
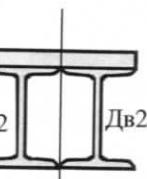
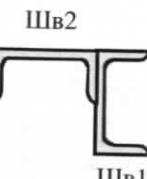
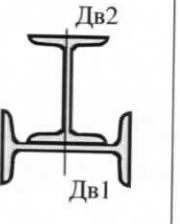
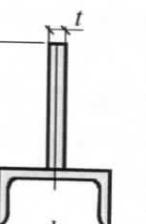
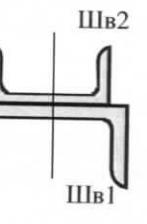
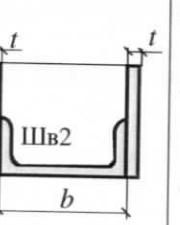
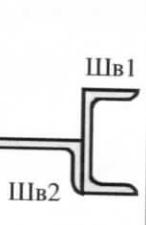
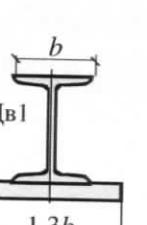
В учебнике [1] – § 5.1–5.3; в пособии [2] – тема 9.

Условие. Дано сечение с одной осью симметрии.*Требуется:*

1. Начертить сечение в масштабе.
2. Разбить сечение на простые фигуры и определить положение центра тяжести сечения.
3. Определить моменты инерции простых фигур относительно центральных осей сечения.
4. Определить главные центральные моменты инерции сечения.

Алфавит	Номер двутиавра 1 (Дв1)	Номер двутиавра 2 (Дв2)	Номер швеллера 1 (Шв1)	Номер швеллера 2 (Шв2)	Толщина пластины, <i>t</i> , мм
	1	2	3	4	5
<i>а б в</i>	24	18	24	18	10
<i>г д е ё</i>	24a	18a	24a	18a	8
<i>ж з и ї</i>	27	20	27	20	6
<i>к л м</i>	27a	20a	30	20a	8
<i>н о п</i>	30	22	33	22	10
<i>р с т</i>	30a	22a	24	22a	12
<i>у ф х</i>	24	18	24a	18	14
<i>ц ч ш щ</i>	24a	18a	27	18a	16
<i>ъ ы ь</i>	27	20	30	20	14
<i>э ю я</i>	27a	20a	33	20a	12

Варианты расчетных схем

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
				
(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
				
(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
				
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)
				
(21)	(22)	(23)	(24)	(25)
				
(26)	(27)	(28)	(29)	(30)
				

Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение сечения

По учебному шифру выбираем вариант сечения (рис. 24). По имени и фамилии (например, И. Иванов) определяем исходные данные и заносим в таблицу.

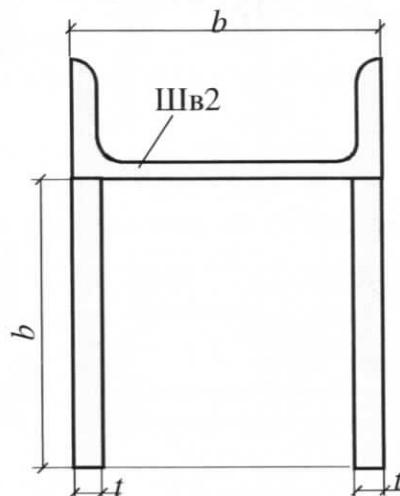


Рис. 24. Вариант сечения с одной осью симметрии

И.	И	в	а	н	ов
1	2	3	4	5	
Номер двутиара 1 (Дв1)	Номер двутиара 2 (Дв2)	Номер швеллера 1 (Шв1)	Номер швеллера 2 (Шв2)	Толщина пластины, <i>t</i> , мм	
-	-	-	18	10	

Изобразим сечение в масштабе (рис. 25), все размеры указываем в см. При этом размеры швеллера возьмем из сортамента (см. табл. П3) и переведем их в см.

2. Определение положения центра тяжести сечения

Разобьем сечение на простые фигуры: фигура 1 – *швеллер*; фигуры 2 и 3 – *прямоугольники*. Отметим положение центров тяжести фигур (точки C_1 , C_2 и C_3). Расстояние от стенки швеллера до точки C_1 (2,14 см) возьмем из сортамента (см. табл. П3). Проведем через данные точки собственные центральные оси фигур z_i , y_i .

Определим координаты центра тяжести сечения относительно вспомогательных осей z_0 и y_0 , используя формулы (9.1) и (9.2) [2]:

$$\left. \begin{aligned} z_c &= \frac{S_{y_0}}{A} = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i} = \frac{z_1 A_1 + z_2 A_2 + z_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}, \\ y_c &= \frac{S_{z_0}}{A} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где S_{y_0} , S_{z_0} – статические моменты сечения; z_i , y_i – координаты центра тяжести i -ой фигуры относительно осей y_0 , z_0 .

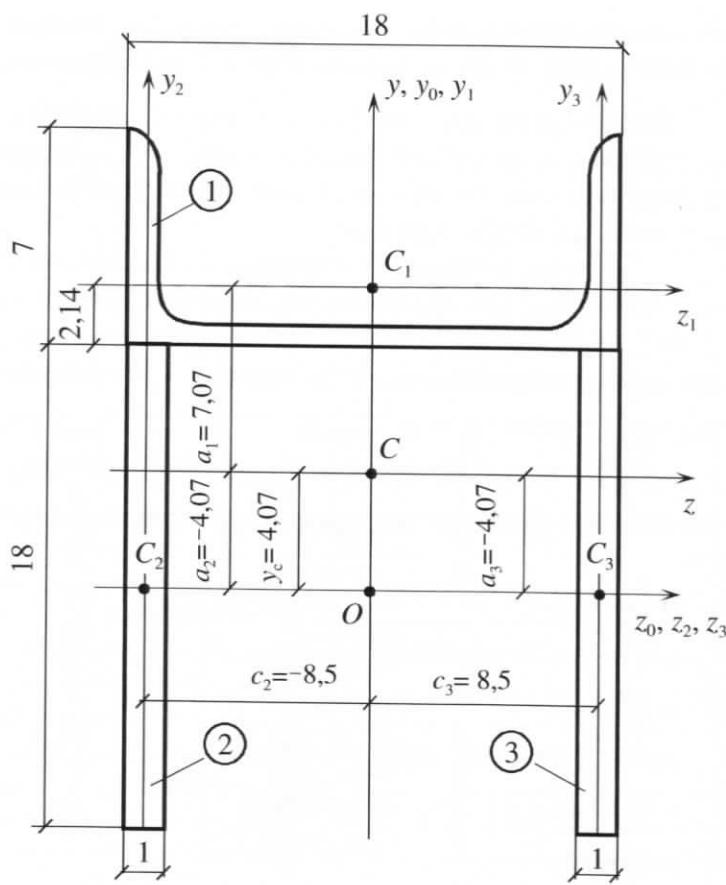


Рис. 25. Рабочий чертеж

Определим площади фигур: площадь швеллера № 18 возьмем из сортамента $A_1 = 20,7 \text{ см}^2$; для прямоугольников $A_2 = A_3 = 1 \cdot 18 = 18 \text{ см}^2$. Координаты центров тяжести определим по чертежу:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -8,5 \text{ см}, \quad z_3 = 8,5 \text{ см}; \quad y_1 = 9 + 2,14 = 11,14 \text{ см}, \quad y_2 = y_3 = 0.$$

Вычислим значения y_c и z_c по формулам (8):

$$z_c = \frac{18 \cdot (-8,5) + 18 \cdot 8,5 + 20,7 \cdot 0}{18 + 18 + 20,7} = 0,$$

$$y_c = \frac{18 \cdot 0 + 18 \cdot 0 + 20,7 \cdot 11,14}{18 + 18 + 20,7} = 4,07 \text{ см}.$$

Отсчитывая координаты центра тяжести y_c и z_c от вспомогательных осей, определяем на чертеже положение центра тяжести (точка C) и проводим центральные оси y и z .

3. Определение моментов инерции простых фигур относительно центральных осей

Предварительно определим значения моментов инерции относительно собственных осей. Для швеллера в соответствии с сортаментом выберем $J_{z_1} = 100 \text{ см}^4$, $J_{y_1} = 1090 \text{ см}^4$ (здесь учтено, что швеллер повернут на 90° относительно его положения в сортаменте).

Для прямоугольников моменты инерции вычислим по формулам (9.13) [2]:

$$J_{z_2} = J_{z_3} = \frac{1 \cdot 18^3}{12} = 486 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_2} = J_{y_3} = \frac{18 \cdot 1^3}{12} = 1,5 \text{ см}^4.$$

Центробежные моменты инерции фигур относительно осей, хотя бы одна из которых является осью симметрии фигуры, равны нулю. Следовательно, в нашем случае $J_{z_1y_1} = J_{z_2y_{21}} = J_{z_3y_3} = 0$.

Определим расстояния между собственными и соответствующими центральными осями:

$$a_1 = y_1 - y_c = 11,14 - 4,07 = 7,07 \text{ см},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 0 - 4,07 = -4,07 \text{ см},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 0 - 4,07 = -4,07 \text{ см},$$

$$c_1 = z_1 - z_c = 0 - 0 = 0,$$

$$c_2 = z_2 - z_c = -8,5 - 0 = -8,5 \text{ см},$$

$$c_3 = z_3 - z_c = 8,5 - 0 = 8,5 \text{ см}.$$

Для определения осевых моментов инерции фигур относительно осей y и z используем формулы (7):

$$J_z^{(1)} = J_{z_1} + a_1^2 A_1 = 100 + 7,07^2 \cdot 20,7 = 1140 \text{ см}^4,$$

$$J_z^{(2)} = J_{z_2} + a_2^2 A_2 = 486 + (-4,07)^2 18 = 784 \text{ см}^4,$$

$$J_z^{(3)} = J_z^{(2)} = 784 \text{ см}^4,$$

$$J_y^{(1)} = J_{y_1} + c_1^2 A_1 = 1090 + 0^2 \cdot 20,7 = 1090 \text{ см}^4,$$

$$J_y^{(2)} = J_{y_2} + c_2^2 A_2 = 1,5 + (-8,5)^2 18 = 1300 \text{ см}^4,$$

$$J_y^{(3)} = J_y^{(2)} = 1300 \text{ см}^4.$$

Центробежные моменты инерции фигур определим по формулам (9.6) [2]:

$$J_{zy}^{(1)} = J_{z_1y_1} + a_1 c_1 A_1 = 0 + 7,07 \cdot 0 \cdot 20,7 = 0,$$

$$J_{zy}^{(2)} = J_{z_2y_2} + a_2 c_2 A_2 = 0 + (-4,07)(-8,5) \cdot 18 = 623 \text{ см}^4,$$

$$J_{zy}^{(3)} = J_{z_3y_3} + a_3 c_3 A_3 = 0 + (-4,07)8,5 \cdot 18 = -623 \text{ см}^4.$$

4. Определение центральных моментов инерции сечения

Определим центральные моменты инерции сечения как алгебраическую сумму моментов инерции простых фигур по формулам (9.7) [2]:

$$J_z = J_z^{(1)} + J_z^{(2)} + J_z^{(3)} = 1140 + 784 + 784 = 2710 \text{ см}^4,$$

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} + J_y^{(3)} = 1090 + 1300 + 1300 = 3690 \text{ см}^4,$$

$$J_{zy} = J_{zy}^{(1)} + J_{zy}^{(2)} + J_{zy}^{(3)} = 0 + 623 + (-623) = 0.$$

5. Определение главных центральных моментов инерции сечения

Так как центробежный момент инерции сечения относительно осей y и z равен нулю, то эти оси являются главными по определению [2]. Следовательно:

максимальный момент инерции $J_{\max} = J_y = 3690 \text{ см}^4$;

минимальный момент инерции $J_{\min} = J_z = 2710 \text{ см}^4$.

Задача 13. Расчет моментов инерции сечения, не имеющего осей симметрии

В учебнике [1] – § 5.1–5.6; в пособии [2] – тема 9.

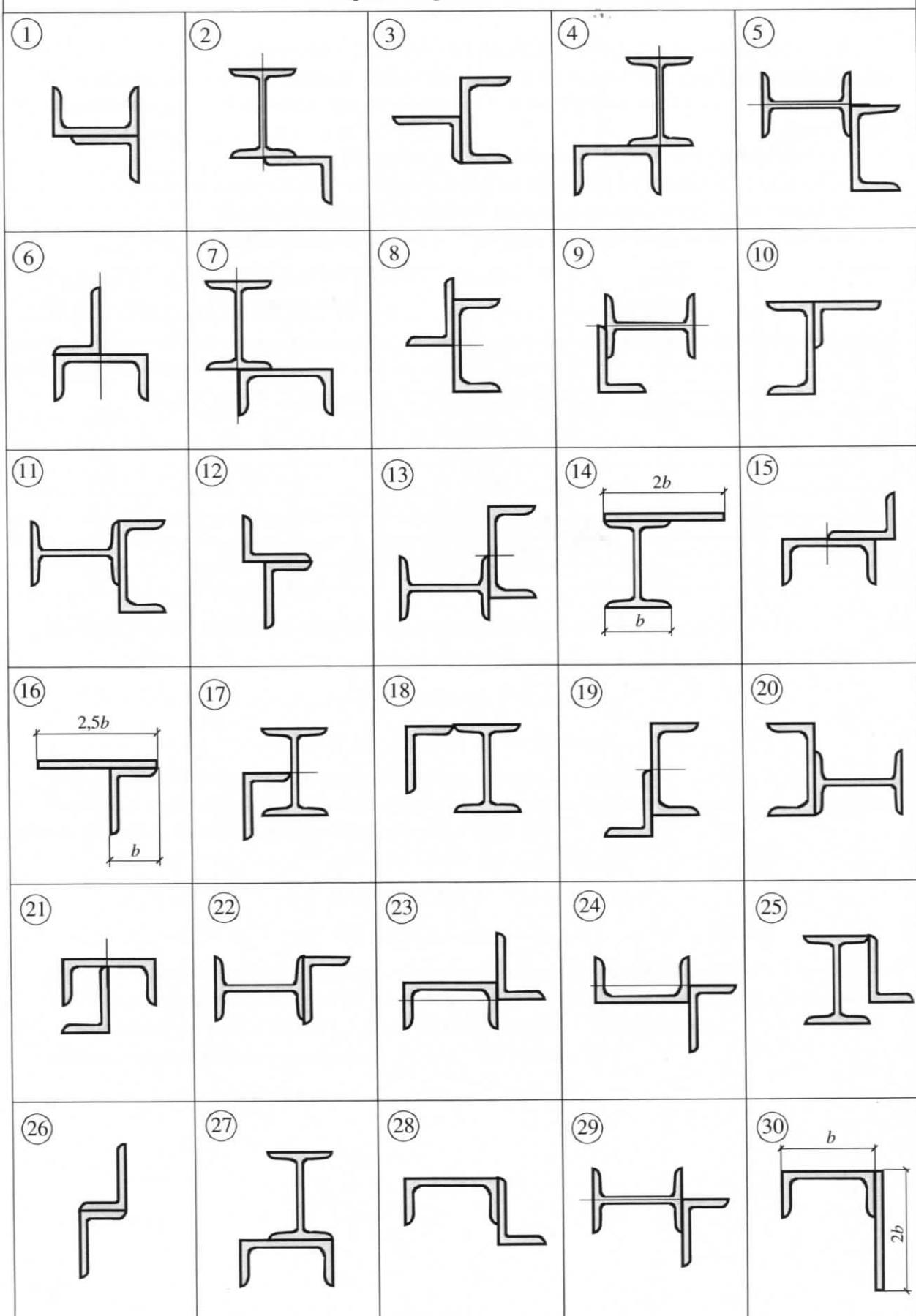
Условие. Дано сечение, составленное из прокатных профилей.

Требуется:

1. Выписать из таблицы сортамента геометрические характеристики прокатных профилей.
2. Определить положение центра тяжести сечения.
4. Вычислить моменты инерции сечения относительно центральных осей.
5. Вычислить главные центральные моменты инерции сечения.
6. Определить положение главных осей и показать их на чертеже.

Алфавит	Номер двутавра	Уголок ($B \times b \times t$)	Номер швеллера	Толщина пластины, см
	1	2	3	4
а б в	16	80×50×5	40	1,0
г д е ё	18	90×56×6	36	1,5
ж з и ї	20	100×63×8	33	2,0
к л м	22	100×65×7	30	2,5
н о п	24	110×70×8	27	3,0
р с т	27	125×80×10	24	3,5
у ф х	30	140×90×10	22	4,0
ц ч ш щ	33	160×100×9	20	4,5
ъ ѿ ѿ	36	180×110×10	18	5,0
э ю я	40	200×125×11	16	5,0

Варианты расчетных схем



Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение сечения

По имени и фамилии (например, Б. Сытин) выбираем данные к расчету и заносим в таблицу. По учебному шифру выбираем вариант сечения (рис. 26).

Б.	С	ы	т	ин
1	2	3	4	
Номер двутавра	Уголок ($B \times b \times t$)	Номер швеллера	Толщина пластины, см	
-	125×80×10	18	-	

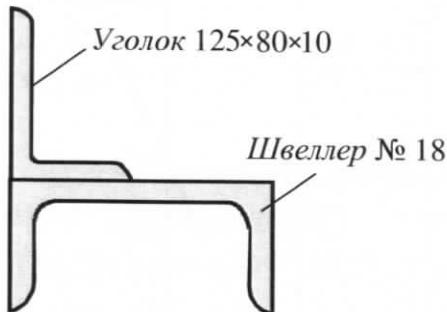
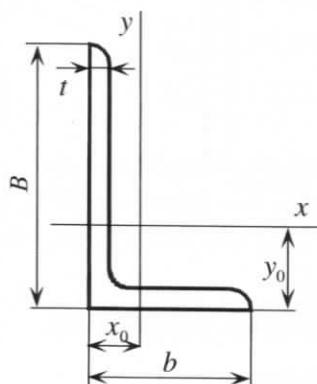


Рис. 26. Вариант сечения без оси симметрии

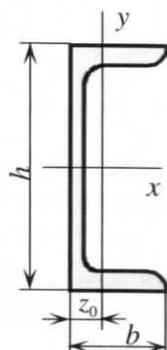
Из таблицы сортамента (см. табл. П2 и П3) выписываем размеры и геометрические характеристики заданных прокатных профилей (на чертеже оси прокатных профилей обозначены в соответствии с таблицами сортамента).

Фигура 1 – уголок неравнополочный 12,5/8



$$\begin{aligned}B &= 12,5 \text{ см} \\b &= 8,0 \text{ см} \\t &= 1,0 \text{ см} \\A &= 19,7 \text{ см}^2 \\J_x &= 312 \text{ см}^4 \\J_y &= 101 \text{ см}^4 \\J_{xy} &= 102 \text{ см}^4 \\x_0 &= 1,92 \text{ см} \\y_0 &= 4,14 \text{ см}\end{aligned}$$

Фигура 2 – швеллер № 18



$$\begin{aligned}b &= 7,0 \text{ см} \\h &= 18 \text{ см} \\A &= 20,7 \text{ см}^2 \\J_x &= 1\,090 \text{ см}^4 \\J_y &= 100 \text{ см}^4 \\z_0 &= 2,14 \text{ см}\end{aligned}$$

Изображаем сечение в масштабе (рис. 27). На чертеже указываем необходимые размеры. Показываем центры тяжести 1-й и 2-й фигуры (C_1 и C_2) и их собственные центральные оси y_1, z_1 и y_2, z_2 .

2. Определение положения центра тяжести сечения

Положение центра тяжести сечения определяем относительно вспомогательных осей y_0 и z_0 (в данном примере приняты оси, совпадающие с y_2 и z_2). Вычислим координаты центров тяжести 1-й и 2-й фигуры:

$$z_1 = -(9 - 1,92) = -7,08 \text{ см}; \quad y_1 = 2,14 + 4,14 = 6,28 \text{ см}; \quad z_2 = 0; \quad y_2 = 0.$$

Координаты центра тяжести заданного сечения определим, используя формулы (8):

$$z_c = \frac{z_1 A_1 + z_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{-7,08 \cdot 19,7 + 0 \cdot 20,7}{19,7 + 20,7} = -3,45 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{6,28 \cdot 19,7 + 0 \cdot 20,7}{19,7 + 20,7} = 3,06 \text{ см.}$$

Откладывая отрезки y_c и z_c от вспомогательных осей, определим на чертеже положение центра тяжести (точки C) и проведем центральные оси сечения y и z .

Проверка расчета: общий центр тяжести должен находиться на линии C_1C_2 , соединяющей центры тяжести простых фигур.

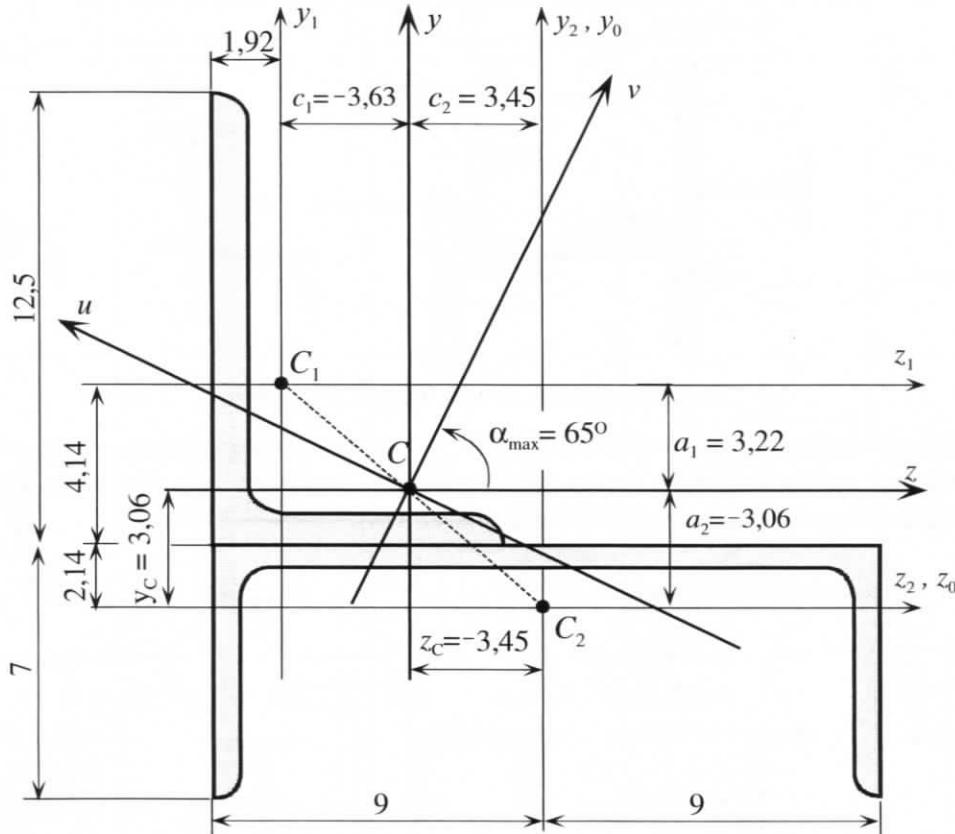


Рис. 27. Рабочий чертеж сечения

3. Определение центральных моментов инерции сечения

Моменты инерции относительно центральных осей y , z определим по формулам (9.7) [2]:

$$\left. \begin{aligned} J_z &= \sum_{i=1}^2 (J_{z_i} + a_i^2 A_i), \\ J_y &= \sum_{i=1}^2 (J_{y_i} + c_i^2 A_i), \\ J_{zy} &= \sum_{i=1}^2 (J_{z_i y_i} + a_i c_i A_i). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь J_{z_i} , J_{y_i} и $J_{z_i y_i}$ – моменты инерции фигур, составляющих сечение, которые были выписаны из сортамента:

$$J_{z_1} = 312 \text{ см}^4, \quad J_{z_2} = 100 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_1} = 101 \text{ см}^4, \quad J_{y_2} = 1090 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_1 y_1} = -102 \text{ см}^4, \quad J_{z_2 y_2} = 0.$$

Так как швеллер повернут на 90° относительно положения в сортаменте, то берем $J_{z_2} = J_y$, а $J_{y_2} = J_x$.

В сортаменте значение центробежного момента инерции указано по модулю; знак J_{z_1, y_1} для уголка установим, используя следующее правило [2]: если концы полок уголка расположены в I и III четвертях собственных осей, то $J_{z_1, y_1} > 0$, если во II и IV четвертях, то $J_{z_1, y_1} < 0$.

Определим отрезки a_i и c_i между осями y , z и y_i , z_i и покажем их на чертеже.

$$c_1 = -(7,08 - 3,45) = -3,63 \text{ см},$$

$$c_2 = 3,45 \text{ см},$$

$$a_1 = 6,28 - 3,06 = 3,22 \text{ см},$$

$$a_2 = -3,06 \text{ см}.$$

По формулам (9) вычислим центральные моменты инерции сечения:

$$J_z = (312 + 3,22^2 \cdot 19,7) + [100 + (-3,06)^2 \cdot 20,7] = 810 \text{ см}^4,$$

$$J_y = [101 + (-3,63)^2 \cdot 19,7] + (1090 + 3,45^2 \cdot 20,7) = 1700 \text{ см}^4,$$

$$J_{zy} = [-102 + 3,22(-3,63) \cdot 19,7] + [0 + (-3,06)3,45 \cdot 20,7] = -551 \text{ см}^4.$$

4. Определение главных центральных моментов инерции

Главные центральные моменты инерции определим по формуле (9.9) [2]:

$$\begin{aligned} J_{\max \min} &= \frac{J_z + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4(J_{zy})^2} = \\ &= \frac{810 + 1700}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(810 - 1700)^2 + 4(-551)^2} = 1255 \pm 707, \\ J_{\max} &= 1255 + 707 = 1960 \text{ см}^4, \\ J_{\min} &= 1255 - 707 = 548 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

5. Определение положения главных осей

Положение оси v , относительно которой момент инерции J максимальен, определим по формуле (9.10) [2]:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{\max} &= -\frac{J_{zy}}{J_{\max} - J_y} = -\frac{-551}{1960 - 1700} = 2,12, \\ \alpha_{\max} &= \arctg(2,12) = 65^\circ. \end{aligned}$$

Положительный угол α_{\max} отсчитываем от оси z против часовой стрелки и проводим ось v . Ось u , относительно которой момент инерции J минимальен, проведем перпендикулярно оси v (см. рис. 27).

6. Кручение стержней

Задача. 14. Расчет вала на прочность и жесткость

В учебнике [1] – глава 8, § 8.1–8.3; в пособии [2] – тема 10.

Условие. Стальной вал постоянной жесткости нагружен сосредоточенными моментами.

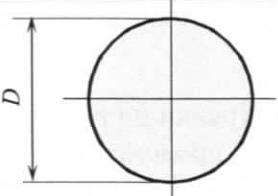
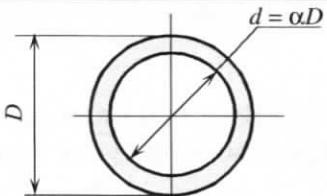
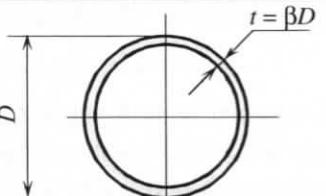
Требуется:

1. Определить крутящие моменты на участках вала и построить эпюру $M_{\text{кр}}$.
2. Из условий прочности и жесткости определить диаметр поперечного сечения вала.
3. Вычислить углы закручивания по участкам вала и построить эпюру ϕ .
4. В опасном сечении вычислить максимальные касательные напряжения.

Принять допускаемое напряжение на срез $[\tau] = 80 \text{ МПа}$, допускаемый относительный угол закручивания $[\theta] = 0,2 \text{ град}/\text{м}$, модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

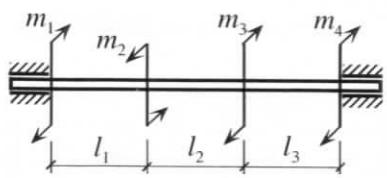
Алфавит	Тип сечения	$m_1, \text{Н}\cdot\text{м}$	$m_2, \text{Н}\cdot\text{м}$	$m_3, \text{Н}\cdot\text{м}$	$l_1, \text{см}$	$l_2, \text{см}$	$l_3, \text{см}$	α	β
		1	2	3	4	5	6	7	8
<i>а б в</i>	I	1 000*	480*	200*	25	100	45	0,2	0,01
<i>г д е ё</i>	III	1 400	500	250	30	95	40	0,30	0,02
<i>ж з и й</i>	II	1 100*	450	300*	35	90	50	0,25	0,05
<i>к л м</i>	I	1 300	400*	350	40	85	55	0,35	0,04
<i>н о п</i>	II	1 300*	350	400*	55	70	60	0,40	0,03
<i>р с т</i>	III	1 000	300*	450	50	75	65	0,45	0,06
<i>у ф х</i>	I	900*	250	500*	45	80	70	0,50	0,07
<i>ц ч и щ</i>	II	800	300	550	60	65	75	0,55	0,06
<i>ъ ѿ ѿ</i>	III	700*	350*	600*	65	60	70	0,60	0,05
<i>э ю я</i>	I	750	400	650	70	55	65	0,65	0,04

Примечание. Знак (*) в таблице означает, что направление момента в расчетной схеме необходимо изменить на противоположное.

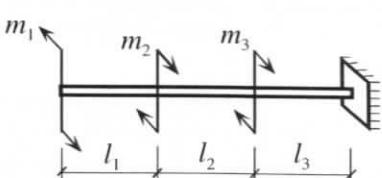
Типы сечений вала		
I Сплошной вал	II Толстостенная труба	III Тонкостенная труба
		
Расчетные формулы полярных моментов инерции и моментов сопротивления		
$J_p = \frac{\pi D^4}{32}$	$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$	$J_p = \frac{\pi D^3 t}{4}$ (10)
$W_p = \frac{\pi D^3}{16}$	$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$	$W_p = \frac{\pi D^2 t}{2}$ (11)

Варианты расчетных схем

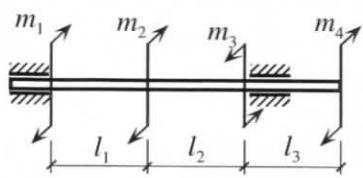
1, 30



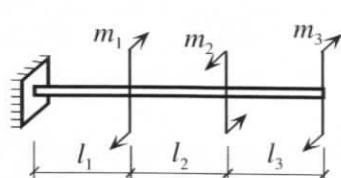
2, 29



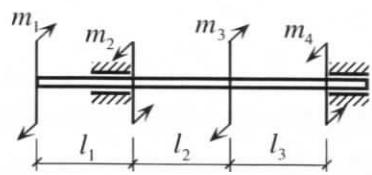
3, 28



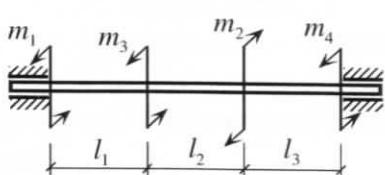
4, 27



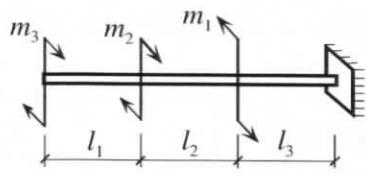
5, 26



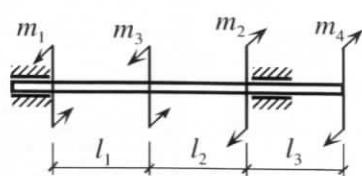
6, 25



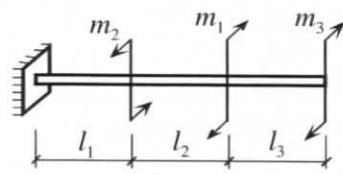
7, 24



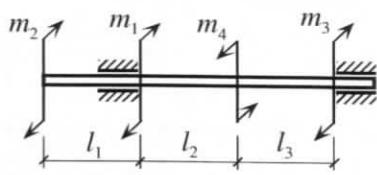
8, 23



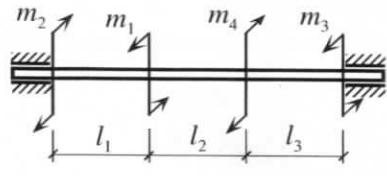
9, 22



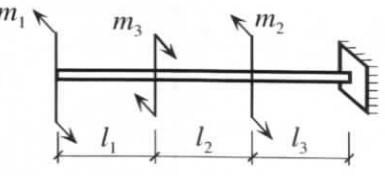
10, 21



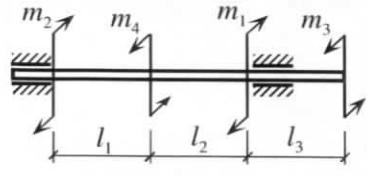
11, 20



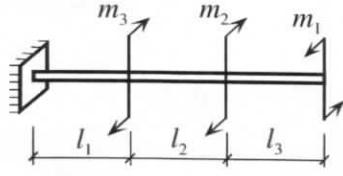
12, 19



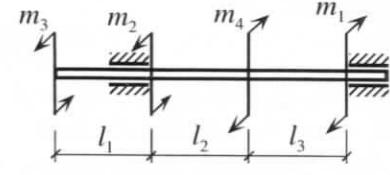
13, 18



14, 17



15, 16



Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По имени и фамилии (например, Д. Иванов) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу.

Д.	И	в	а	н	о	в	Д.	И
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Тип сечения	$m_1, \text{Н}\cdot\text{м}$	$m_2, \text{Н}\cdot\text{м}$	$m_3, \text{Н}\cdot\text{м}$	$l_1, \text{см}$	$l_2, \text{см}$	$l_3, \text{см}$	α	β
III	1100*	480*	200*	55	70	45	0,30	0,05

В соответствии с учебным шифром (09-М-29) выбираем вариант расчетной схемы № 29.

Изобразим расчетную схему (рис. 28, а). Значения моментов m_1, m_2, m_3 в таблице отмечены звездочкой, следовательно, на расчетной схеме их направление изменяем на противоположное (рис. 28, б).

2. Определение момента m_4

В данной расчетной схеме (см. рис. 28, б) m_4 – момент, действующий в жесткой заделке (опорная реакция). Определим его значение из уравнения равновесия вала:

$$\sum m_x = m_1 - m_2 - m_3 - m_4 = 0,$$

получим $m_4 = m_1 - m_2 - m_3 = 1100 - 480 - 200 = 420 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

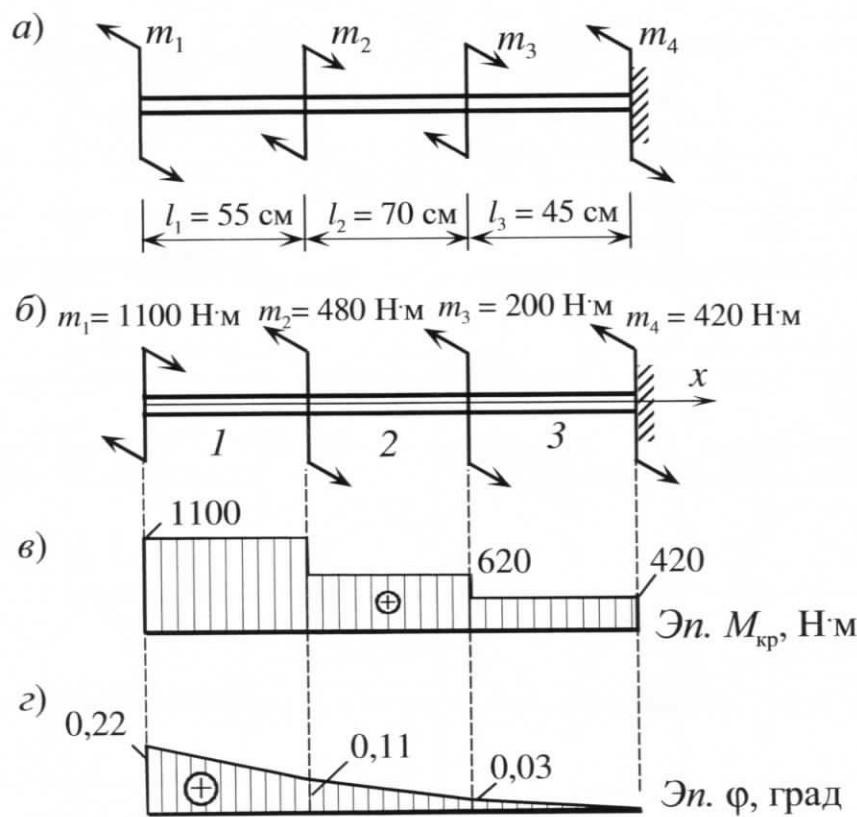


Рис. 28. Расчетная схема и эпюры M_{kp}, ϕ

3. Определение крутящих моментов M_{kp}

Разобьем вал на три участка (рис. 28, б) и, рассматривая равновесие отсеченных частей, определим крутящие моменты на каждом из них. Крутящий момент считаем положительным, если он при взгляде со стороны отброшенной части направлен по часовой стрелке (рис. 29).

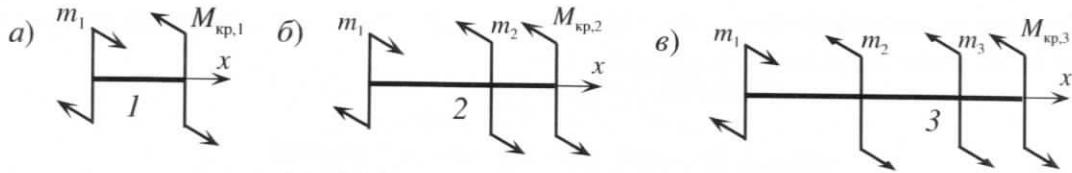


Рис. 29. Расчетные схемы отсеченных частей

1-й участок (рис. 29, а)

$$\sum m_x = M_{kp}^{(1)} - m_1 = 0,$$

откуда $M_{kp}^{(1)} = m_1 = 1100 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

2-й участок (рис. 29, б)

$$\sum m_x = M_{kp}^{(2)} - m_1 + m_2 = 0,$$

откуда $M_{kp}^{(2)} = m_1 - m_2 = 1100 - 480 = 620 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

3-й участок (рис. 29, в)

$$\sum m_x = M_{kp}^{(3)} - m_1 + m_2 + m_3 = 0,$$

откуда $M_{kp}^{(3)} = m_1 - m_2 - m_3 = 1100 - 480 - 200 = 420 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

По результатам расчетов строим эпюру M_{kp} (рис. 28, в).

4. Определение диаметра тонкостенной трубы

Вал должен удовлетворять условиям прочности и жесткости.

Подберем диаметр D из условия прочности по формуле (10.8) [2]:

$$\tau_{max} = \frac{|M_{kp}|_{max}}{W_p} \leq [\tau].$$

Из формулы (11) имеем $W_p = \frac{\pi D^3 \beta}{2}$. Тогда

$$\tau_{max} = \frac{2|M_{kp}|_{max}}{\pi D^3 \beta} \leq [\tau].$$

Из последнего соотношения выразим диаметр:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{2|M_{kp}|_{max}}{\pi \beta [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 1100}{3,14 \cdot 0,05 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,056 \text{ м} = 56 \text{ мм.}$$

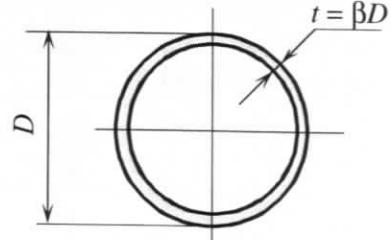
Из условия жесткости вала по формуле (10.9) [2] вычислим требуемое значение полярного момента инерции:

$$J_p \geq \frac{|M_{kp}|_{max}}{G[\theta]} = \frac{1100 \cdot 180}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,2 \cdot 3,14} = 3,93 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Относительный угол закручивания имеет размерность град/м. При вычислениях J_p градусы переводим в радианы: значение $[\theta]$ умножаем на число π и делим на 180.

Из формулы (10) определим $J_p = \frac{\pi D^4 \beta}{4}$ и выразим диаметр вала:

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{4J_p}{\pi \beta}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 3,93 \cdot 10^{-6}}{3,14 \cdot 0,05}} = 0,1 \text{ м} = 100 \text{ мм.}$$



Принимаем величину диаметра вала $D = 100$ мм. При этом полярный момент инерции сечения в соответствии с формулой (10)

$$J_p = \frac{3,14 \cdot 10^4 \cdot 0,05}{4} = 393 \text{ см}^4,$$

полярный момент сопротивления сечения по формуле (11):

$$W_p = \frac{3,14 \cdot 10^3 \cdot 0,05}{2} = 78,5 \text{ см}^3.$$

5. Определение углов закручивания вала

Угол закручивания крайних сечений i -го участка φ_i определим по формуле (10.6) [2]:

$$\varphi_1 = \frac{M_{kp}^{(1)} l_1}{GJ_p} = \frac{1100 \cdot 0,55}{8 \cdot 10^{10} \cdot 393 \cdot 10^{-8}} = 1,92 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = \frac{1,92 \cdot 10^{-3} \cdot 180^\circ}{\pi} = 0,11^\circ;$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{kp}^{(2)} l_2}{GJ_p} = \frac{620 \cdot 0,70}{8 \cdot 10^{10} \cdot 393 \cdot 10^{-8}} = 1,38 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = \frac{1,38 \cdot 10^{-3} \cdot 180^\circ}{\pi} = 0,08^\circ;$$

$$\varphi_3 = \frac{M_{kp}^{(3)} l_3}{GJ_p} = \frac{420 \cdot 0,45}{8 \cdot 10^{10} \cdot 393 \cdot 10^{-8}} = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = \frac{0,6 \cdot 10^{-3} \cdot 180^\circ}{\pi} = 0,03^\circ.$$

Определим абсолютные углы закручивания сечений, проведенных по границам участков (рис. 30). Угол закручивания равен алгебраической сумме углов закручивания на участках, расположенных между сечением и заделкой (или сечением, принятым за начало отсчета).

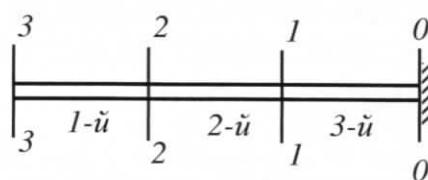


Рис. 30. Схема расположения характерных сечений

Сечение 0–0: $\varphi_{0-0} = 0$.

Сечение 1–1: $\varphi_{1-1} = \varphi_3 = 0,03^\circ$;

Сечение 2–2: $\varphi_{2-2} = \varphi_3 + \varphi_2 = 0,03^\circ + 0,08^\circ = 0,11^\circ$;

Сечение 3–3: $\varphi_{3-3} = \varphi_3 + \varphi_2 + \varphi_1 = 0,03^\circ + 0,08^\circ + 0,11^\circ = 0,22^\circ$.

Строим эпюру углов закручивания φ (рис. 28, 2).

6. Определение максимального касательного напряжения

Максимальное касательное напряжение определим по формуле (10.5) [2]:

$$\tau_{max} = \frac{|M_{kp}|_{max}}{W_p} = \frac{1100}{78,5 \cdot 10^{-6}} = 14 \cdot 10^6 \text{ Па} = 14 \text{ МПа.}$$

7. Плоский изгиб балок

Задача 15. Расчет консольной балки

В учебнике [1] – глава 6, § 6.1–6.5; в пособии [2] – тема 11.

Условие. Консольная балка прямоугольного поперечного сечения нагружена сосредоточенными силами и моментами.

Требуется:

1. Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .
2. Из условия прочности подобрать сечение с заданным соотношением размеров.
3. В опасном сечении, где изгибающий момент достигает максимального значения, построить эпюру нормальных напряжений σ .

Расчетное сопротивление материала R_y выбрать из таблицы.

Алфавит	a , м	m , кН·м	P , кН	R_y , МПа	h/b
	1	2	3	4	5
<i>а б в</i>	0,5	24	4	10	1,0
<i>г д е ё</i>	0,6	22	6	20	1,2
<i>ж з и ѹ</i>	0,7	20	8	50	1,3
<i>к л м</i>	0,8	18	10	80	1,4
<i>н о п</i>	1,0	16	12	100	1,5
<i>р с т</i>	1,2	14	14	120	1,6
<i>у ф х</i>	1,0	12	16	150	1,7
<i>ц ч ш щ</i>	0,8	10	18	160	1,8
<i>ъ ѿ ѿ</i>	0,5	8	20	180	1,9
<i>э ю я</i>	0,6	6	5	200	2,0

Варианты расчетных схем

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)
(21)	(22)	(23)	(24)	(25)
(26)	(27)	(28)	(29)	(30)

Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

В соответствии с учебным шифром выбираем вариант расчетной схемы. По имени и фамилии (например, С. Ивлев) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу.

C.	И	в	л	е	в
1	2	3	4	5	6
$a, \text{м}$	$m, \text{kH}\cdot\text{m}$	P, kH	$R_y, \text{МПа}$	h/b	
1,2	20	4	80	1,2	

Изобразим расчетную схему стержня, соблюдая масштаб длин (рис. 31, a). На схеме указываем числовые значения нагрузок и длины участков.

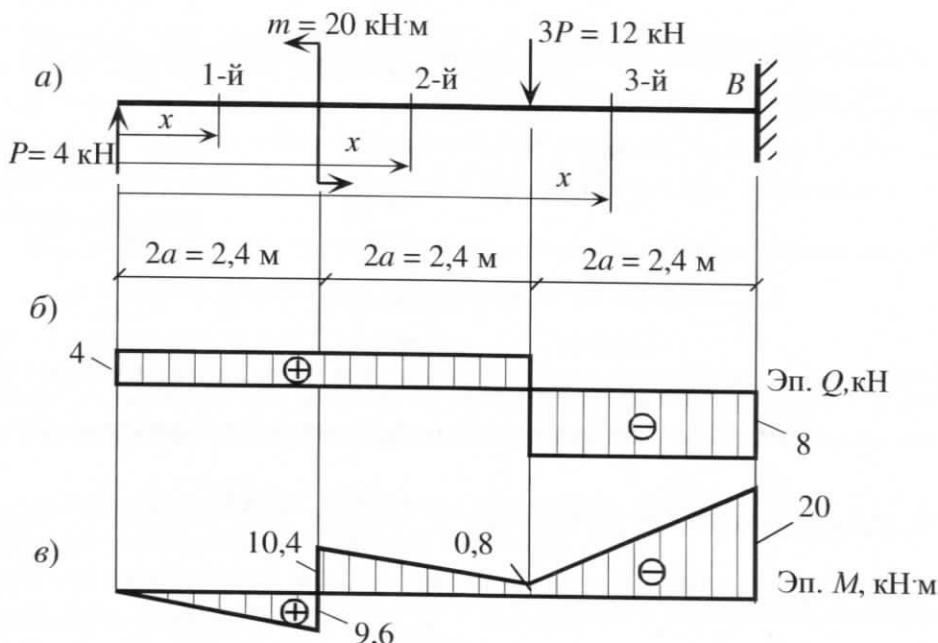


Рис. 31. Расчетная схема балки и эпюры Q и M

2. Определение поперечной силы Q и изгибающих моментов M

Разобьем балку на три участка по точкам приложения сосредоточенных сил и моментов (рис. 31, a). Используя метод сечений, определим значения Q и M на каждом из участков. Правило знаков для Q и M приведено в [2, с. 63].

Участок 1

$$0 \leq x \leq 2,4 \text{ м.}$$

$$Q_1 = P = 4 \text{ кН},$$

$$M_1 = Px.$$

$$\text{При } x = 0 \quad M_2 = 0,$$

$$\text{при } x = 2,4 \text{ м} \quad M_2 = 9,6 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Участок 2

$$2,4 \leq x \leq 4,8.$$

$$Q_2 = P = 4 \text{ кН},$$

$$M_2 = Px - m.$$

$$\text{При } x = 2,4 \text{ м} \quad M_2 = -10,4 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } x = 4,8 \text{ м} \quad M_2 = -0,8 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Участок 3

$$4,8 \leq x \leq 7,2 \text{ м}$$

$$Q_3 = P - 3P = 4 - 12 = -8 \text{ кН},$$

$$M_3 = -m + Px - 3P(x - 4,8).$$

$$\text{При } x = 4,8 \text{ м} \quad M_3 = -0,8 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } x = 7,2 \text{ м} \quad M_3 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

По вычисленным значениям строим эпюры Q (рис. 31, б) и M (рис. 31, в). На эпюре Q положительные значения откладываем вверх, отрицательные – вниз. Эпюра M строится на *растянутых волокнах*: значения откладываем в сторону растянутых волокон. Поэтому в соответствии с принятым правилом знаков для изгибающего момента положительные значения необходимо откладывать вниз, отрицательные – вверх.

Эпюры Q и M проверяем в соответствии с правилами, сформулированными в пособии [2, с. 64].

3. Определение размеров поперечного сечения балки

Размеры поперечного сечения балки определим из условия прочности по нормальным напряжениям, используя формулу (11.3) [2]:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} \leq R_y.$$

Вычислим требуемое значение момента сопротивления балки W_z , учитывая, что $|M|_{\max} = 20$ кН·м (см. эпюру M). Получим

$$W_z \geq \frac{|M|_{\max}}{R_y} = \frac{20 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 250 \text{ см}^3. \quad (12)$$

Момент сопротивления сечения определяется по формуле (9.11) [2]:

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}. \quad (13)$$

Момент инерции сечения относительно нейтральной оси z выражим через размеры b и h , используя заданное соотношение между высотой и шириной балки, $\frac{h}{b} = 1,2$ или

$h = 1,2b$. По формуле (9.13) [2] получим $J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{b(1,2b)^3}{12} = 0,144b^4$. Расстояние от оси z до наиболее удаленного волокна $y_{\max} = \frac{h}{2} = \frac{1,2b}{2} = 0,6b$.

По формуле (13) получим $W_z = \frac{0,144b^4}{0,6b} = 0,24b^3$. Определим необходимую ширину балки:

$$b = \sqrt[3]{\frac{W_z}{0,24}} \geq \sqrt[3]{\frac{250}{0,24}} = 10,2 \text{ см.}$$

Выбираем следующие размеры балки: $b = 10,2$ см, $h = 1,2 \cdot 10,2 = 12,2$ см. При этом момент сопротивления $W_z = 0,24(10,2)^3 = 255 \text{ см}^3$.

4. Построение эпюр нормальных напряжений

Рассмотрим опасное сечение балки, где изгибающий момент достигает максимального значения: $|M|_{\max} = 20$ кН·м (рис. 31, б). Эпюру σ (рис. 32) построим по двум значениям напряжений: на нейтральной оси z , где $\sigma = 0$; в наиболее удаленном волокне

$$\sigma = \sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} = \frac{20 \cdot 10^3}{255 \cdot 10^{-6}} = 0,784 \cdot 10^9 = 78,4 \text{ МПа.}$$

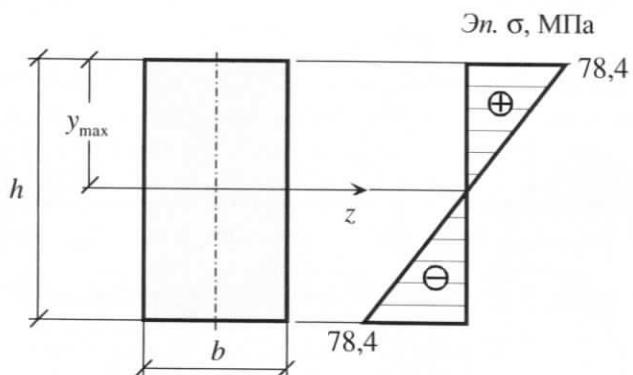


Рис. 32. Эпюра нормальных напряжений σ

Обратите внимание:

- 1) напряжения по высоте балки меняются по линейному закону: чем дальше точка (волокно) от нейтральной оси, тем больше напряжения;
- 2) знаки напряжений определяются в соответствии с правилом знаков изгибающего момента. В сечении B момент имеет отрицательное значение, следовательно верхние волокна испытывают растяжение (напряжения положительные), а нижние – сжатие (напряжения отрицательные).

Задача 16. Расчет балки на двух опорах

В учебнике [1] – глава 6, § 6.1–6.5; в пособии [2] – тема 11.

Условие. Балка на двух опорах нагружена равномерно распределенной нагрузкой и сосредоточенной силой или сосредоточенным моментом.

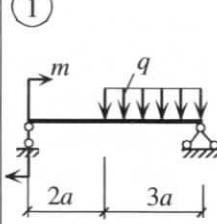
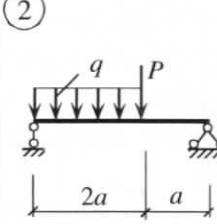
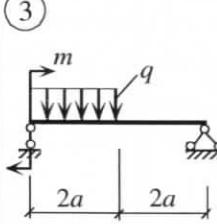
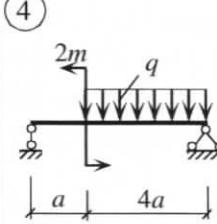
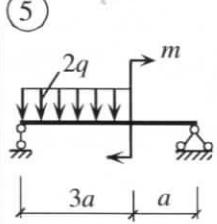
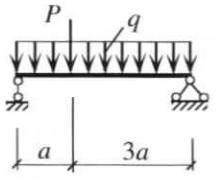
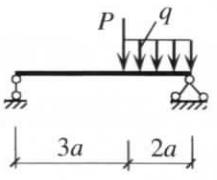
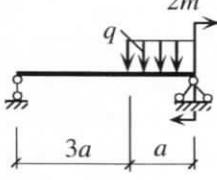
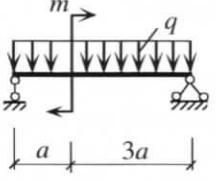
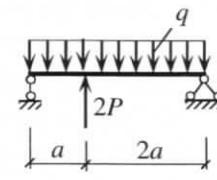
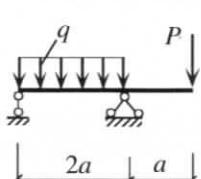
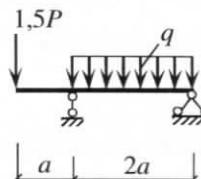
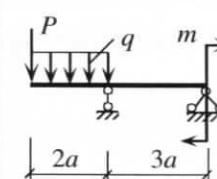
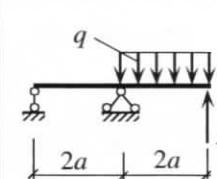
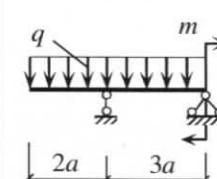
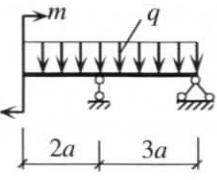
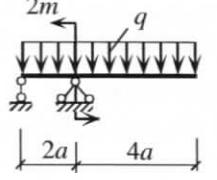
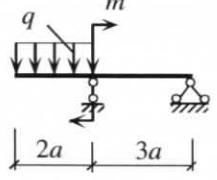
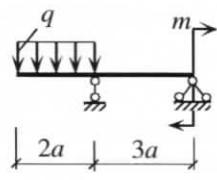
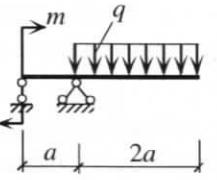
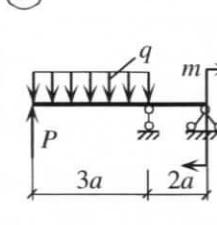
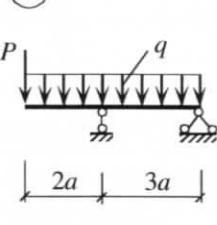
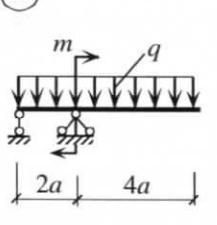
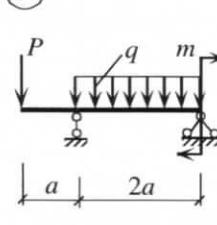
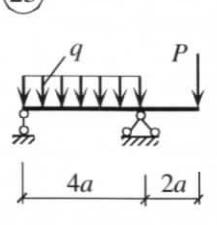
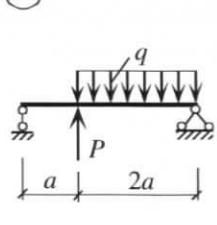
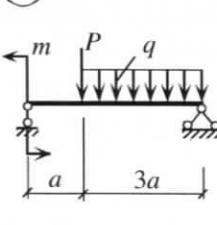
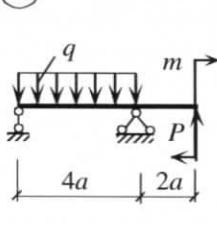
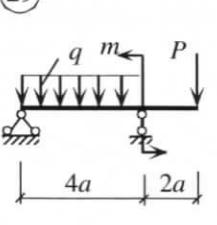
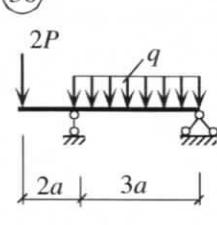
Требуется:

1. Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .
2. Из условия прочности подобрать номер двутавра.
3. В сечении, где изгибающий момент достигает максимального значения, построить эпюру нормальных напряжений σ .
4. Проверить прочность балки по касательным напряжениям.

Расчетное сопротивление материала балки на растяжение R_y выбрать из таблицы. Расчетное сопротивление на срез принять $R_s = 0,6 R_y$.

Алфавит	R_y , МПа	a , м	m , кН·м	q , кН/м	P , кН
	1	2	3	4	5
а б в	160	1,2	24	20	5
г д е ё	170	1,0	22	18	6
ж з и ї	180	0,8	20	16	8
к л м	190	0,7	18	14	10
н о п	200	0,6	16	12	12
р с т	210	0,5	14	10	14
у ф х	220	0,6	12	8	16
ц ч ш ј	230	0,8	10	6	18
ъ ѿ ѿ	240	1,0	8	10	20
э ю я	250	1,2	6	12	22

Варианты расчетных схем

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
				
(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
				
(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
				
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)
				
(21)	(22)	(23)	(24)	(25)
				
(26)	(27)	(28)	(29)	(30)
				

Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

В соответствии с учебным шифром выбираем вариант расчетной схемы. По имени и фамилии (например, С. Ивлев) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу.

C.	И	в	л	е	в
1	2	3	4	5	6
$R_y, \text{МПа}$	$a, \text{м}$	$m, \text{kH}\cdot\text{м}$	$q, \text{kN/m}$	P, kH	
210	0,8	24	14	6	

Изобразим расчетную схему балки, соблюдая масштаб длин (рис. 33, а). На схеме указываем числовые значения нагрузок и длины участков.

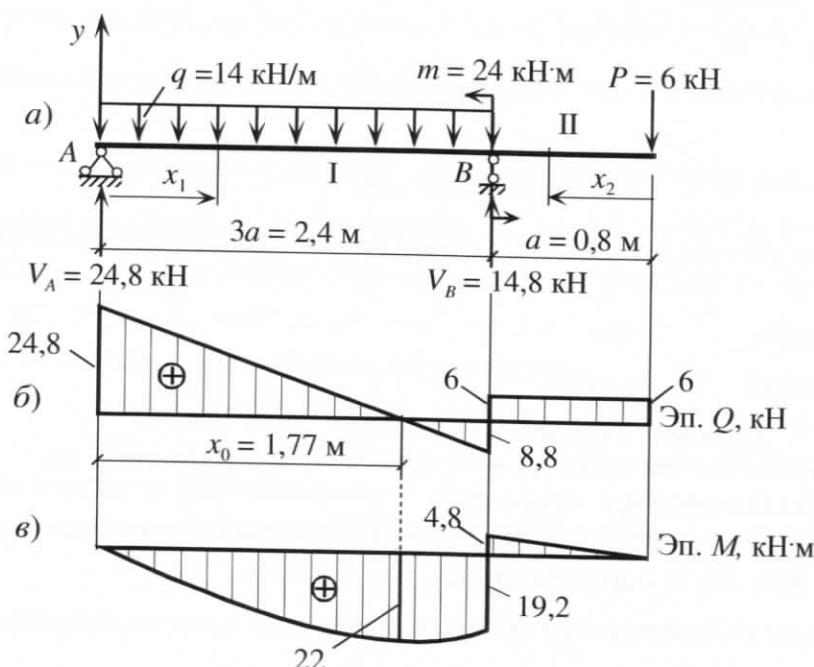


Рис. 33. Расчетная схема балки и эпюры Q и M

2. Определение опорных реакций

В шарнирных опорах A и B на балку действуют опорные реакции V_A и V_B (рис. 33, а). Составим уравнения равновесия балки:

$$\sum m_A = -(q \cdot 2,4)l,2 - P \cdot 3,2 + m + V_B \cdot 2,4 = 0,$$

$$\text{откуда } V_B = \frac{14 \cdot 2,4 \cdot 1,2 + 6 \cdot 3,2 - 24}{2,4} = 14,8 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = (q \cdot 2,4)l,2 - P \cdot 0,8 + m - V_A \cdot 2,4 = 0,$$

$$\text{откуда } V_A = \frac{14 \cdot 2,4 \cdot 1,2 - 6 \cdot 0,8 + 24}{2,4} = 24,8 \text{ кН.}$$

Для проверки расчета составим еще одно уравнение равновесия балки:

$$\sum F_y = V_A + V_B - P - q \cdot 2,4 = 24,8 + 14,8 - 6 - 14 \cdot 2,4 = 0.$$

Уравнение выполняется, следовательно, опорные реакции определены правильно.

3. Определение поперечных сил и изгибающих моментов

Балку разбиваем на два участка по точкам приложения сосредоточенных усилий (сил или моментов) и границам распределенной нагрузки.

На первом участке будем определять значения Q и M , рассматривая равновесие левой отсеченной части.

Участок I

$$0 \leq x_1 \leq 2,4 \text{ м.}$$

$$Q_I = V_A - qx_1, \quad M_I = V_A x - \frac{qx_1^2}{2}.$$

При $x_1 = 0 \quad Q_I = 24,8 \text{ кН}, \quad M_I = 0;$ при $x_1 = 2,4 \text{ м} \quad Q_I = -8,8 \text{ кН}, \quad M_I = 19,2 \text{ кН}\cdot\text{м.}$

На этом участке необходимо дополнительного определить экстремальное значение изгибающего момента в сечении, где поперечная сила $Q_I = 0$ [2, с. 64].

$$Q_I = V_A - qx = 0,$$

$$\text{откуда } x = \frac{V_A}{q} = \frac{24,8}{14} = 1,77 \text{ м.}$$

В данном сечении при $x = 1,77 \text{ м}$ определяем экстремальное значение изгибающего момента M :

$$M_I = 24,8 \cdot 1,77 - 14 \frac{1,77^2}{2} = 22 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

На втором участке рассматриваем равновесие правой отсеченной части.

Участок 2

$$0 \leq x_2 \leq 0,8 \text{ м.}$$

$$Q_{II} = P = 6 \text{ кН}, \quad M_{II} = -Px_2,$$

При $x_2 = 0 \quad M_{II} = 0;$ при $x_2 = 0,8 \text{ м} \quad M_{II} = -4,8 \text{ кН}\cdot\text{м.}$

По вычисленным значениям Q и M строим эпюры (рис. 34, б, в).

4. Определение номера двутавра

Номер двутавра определяем из условия прочности по нормальным напряжениям.

По эпюре M (рис. 33, в) определяем $|M|_{\max} = 22 \text{ кН}\cdot\text{м.}$

По формуле (12) определим требуемое значение момента сопротивления двутавровой балки:

$$W_z \geq \frac{|M|_{\max}}{R_y} = \frac{22 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 1,05 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 105 \text{ см}^3.$$

Из таблицы сортамента (см. табл. П4) выбираем двутавр № 16, который имеет наиболее близкое значение момента сопротивления к расчетному: $W_z = 109 \text{ см}^3$.

5. Построение эпюры нормальных напряжений

Эпюру нормальных напряжений σ (рис. 34) строим в опасном сечении, где $M = |M_{\max}| = 22 \text{ кН}\cdot\text{м}$, по двум значениям напряжений: на нейтральной оси $\sigma = 0$ и в наиболее удаленном волокне

$$\sigma = \sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} = \frac{22 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} = 202 \cdot 10^6 \text{ Па} = 202 \text{ МПа.}$$

Знаки напряжений определяем в соответствии с правилом знаков изгибающего момента. В данном сечении момент положительный, следовательно, нижние волокна балки испытывают растяжение (плюс), а верхние – сжатие (минус).

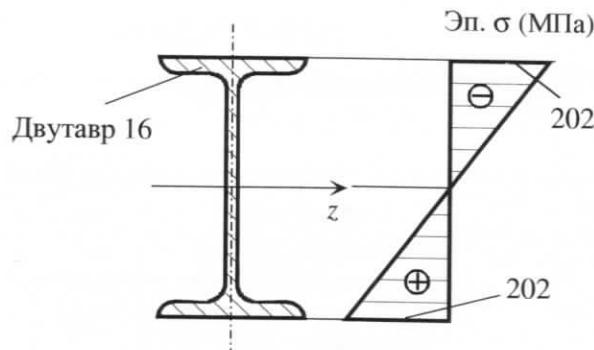


Рис. 34. Эпюра σ

6. Проверка прочности двутавровой балки по касательным напряжениям

Проверим прочность двутавровой балки на срез по формуле (11.5) [2]:

$$\tau_{\max} = \frac{|Q|_{\max} S_z^{\text{nc}}}{J_z b} \leq R_s.$$

По эпюре Q (см. рис. 34, б) получим $|Q|_{\max} = 24,8$ кН. Расчетное сопротивление материала балки на срез определим из условия задачи: $R_s = 0,6R_y = 0,6 \cdot 210 = 126$ МПа.

Геометрические характеристики двутавра № 16 выписываем из таблицы сортамента (см. табл. П4): $S_z^{\text{nc}} = 62,3 \text{ см}^3$, $J_z = 873 \text{ см}^4$, $b = s = 5 \text{ мм}$.

Определим максимальное касательное напряжение:

$$\tau_{\max} = \frac{24,8 \cdot 10^3 \cdot 62,3 \cdot 10^{-6}}{873 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 35,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 35,4 \text{ МПа.}$$

Условие прочности на срез выполняется:

$$\tau_{\max} = 35,4 \text{ МПа} < R_s = 126 \text{ МПа.}$$

Библиографический список

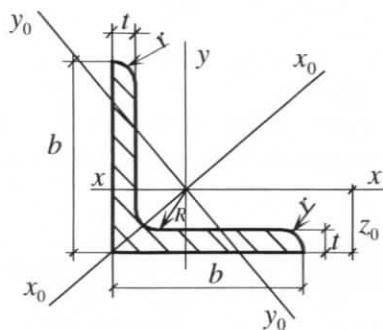
1. Ахметзянов М.Х., Грес П.В., Лазарев И.Б. Сопротивление материалов: Учеб. М.: Высшая школа, 2007. 334 с.
2. Агуленко В.Н. Сопротивление материалов: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во СГУПСа, 2002. Ч. 1. 105 с.
3. Грес П.В. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2009. 135 с.
4. Краснов Л.А. Справочник для решения задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во СГУПСа, 2004. 117 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сортамент стального проката

Таблица III

Уголки стальные горячекатаные равнополочные (ГОСТ 8509-93)



b – ширина полки;
 t – толщина полки;
 R – радиус внутреннего закругления;
 r – радиус закругления полок;
 J – момент инерции;
 i – радиус инерции;
 z_0 – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки;
 J_{xy} – центробежный момент инерции (абс. величина).

Номер уголка	Размеры уголка, мм				Площадь поперечного сечения, см^2	Справочные величины для осей							Масса 1 м уголка, кг		
	b	t	R	r		$x - x$		$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		J_{xy} , см^4	z_0 , см		
						J_x , см^4	i_x , см	$J_{x_0 \max}$, см^4	$i_{x_0 \max}$, см	$J_{y_0 \min}$, см^4	$i_{y_0 \min}$, см				
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,23	0,60	0,89	
		4				1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	0,28	0,64	1,15
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	0,47	0,73	1,12	
		4				1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	0,59	0,76	1,46
		5				2,27	1,22	0,73	1,91	0,92	0,53	0,48	0,69	0,80	1,78
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	0,68	0,80	1,27	
3	30	3	4,0	1,3	1,74	1,45	0,91	2,30	1,15	0,60	0,59	0,85	0,85	1,36	
		4				2,27	1,84	0,90	2,92	1,13	0,77	0,58	1,08	0,89	1,78
		5				2,78	2,20	0,89	3,47	1,12	0,94	0,58	1,27	0,93	2,18
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	1,03	0,89	1,46	
		4				2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	1,32	0,94	1,91
3,5	35	3	4,5	1,5	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69	1,37	0,97	1,60	
		4				2,67	3,01	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68	1,75	1,01	2,10
		5				3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68	2,10	1,05	2,58
4	40	3	5,0	1,7	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	2,08	1,09	1,85	
		4				3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	2,68	1,3	2,42
		5				3,79	5,53	1,21	8,75	1,52	2,30	0,78	3,22	1,17	2,98
		6				4,48	6,41	1,20	10,13	1,50	2,70	0,78	3,72	1,21	3,52
4,5	45	3	5,0	1,7	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	3,00	1,21	2,08	
		4				3,48	6,63	1,38	10,52	1,74	2,74	0,89	3,89	1,26	2,73
		5				4,29	8,03	1,37	12,74	1,72	3,33	0,88	4,71	1,30	3,37
		6				5,08	9,35	1,36	14,80	1,71	3,90	0,88	5,45	1,34	3,90
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1,00	4,16	1,33	2,32	
		4				3,89	9,21	1,54	14,63	1,94	3,80	0,99	5,42	1,38	3,05
		5				4,80	11,20	1,53	17,77	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42	3,77
		6				5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98	7,65	1,46	4,47
		7				6,56	14,84	1,50	23,47	1,89	6,21	0,97	8,63	1,50	5,15
		8				7,41	16,51	1,49	26,03	1,87	6,98	0,97	9,52	1,53	5,82

Продолжение табл. П1

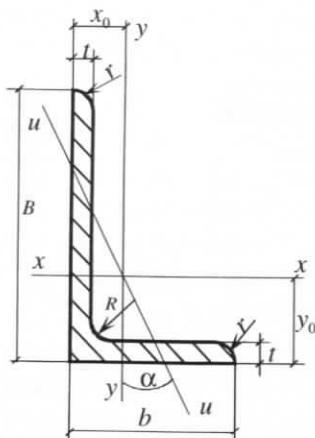
Номер уголка	Размеры уголка, мм				Площадь попечного сечения, см ²	Справочные величины для осей								Масса 1 м уголка, кг		
	b	t	R	r		x - x		x ₀ - x ₀		y ₀ - y ₀		J _{xy} , см ⁴	z ₀ , см			
						J _x , см ⁴	i _x , см	J _{x₀ max} , см ⁴	i _{x₀ max} , см	J _{y₀ min} , см ⁴	i _{y₀ min} , см					
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	1,73	20,79	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52	3,44		
		5			5,41	15,97	1,72	25,36	2,16	6,59	1,10	9,41	1,57	4,25		
6	60	4	7,0	2,3	4,72	16,21	1,85	25,69	2,33	6,72	1,19	9,48	1,62	3,71		
		5			5,83	19,79	1,84	31,40	2,32	8,18	1,18	11,61	1,66	4,58		
		6			6,92	23,21	1,83	36,81	2,31	9,60	1,18	13,60	1,70	5,43		
		8			9,04	29,55	1,81	46,77	2,27	12,34	1,17	17,22	1,78	7,10		
		10			11,08	35,32	1,79	55,64	2,24	15,00	1,16	20,32	1,85	8,70		
6,3	63	4			4,96	18,86	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	11,00	1,69	3,90		
		5	7,0	2,3	6,13	23,10	1,94	36,80	2,44	9,52	1,25	13,70	1,74	4,81		
		6			7,28	27,06	1,93	42,91	2,43	11,18	1,24	15,90	1,78	5,72		
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	29,04	2,16	46,03	2,72	12,04	1,39	17,00	1,88	4,87		
		5			6,86	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	18,70	1,90	5,38		
		6			8,15	37,58	2,15	59,64	2,71	15,52	1,38	22,10	1,94	6,39		
		7			9,42	42,98	2,14	68,19	2,69	17,77	1,37	25,20	1,99	7,39		
		8			10,67	48,16	2,12	76,35	2,68	19,97	1,37	28,20	2,02	8,37		
		10			13,11	57,90	2,10	91,52	2,64	24,27	1,36	33,60	2,10	10,29		
7,5	75	5	9,0	3,0	7,39	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	23,10	2,02	5,80		
		6			8,78	46,57	2,30	73,87	2,90	19,28	1,48	27,30	2,06	6,89		
		7			10,15	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,48	31,20	2,10	7,96		
		8			11,50	59,84	2,28	94,89	2,87	24,80	1,47	35,00	2,15	9,02		
		9			13,83	66,10	2,27	104,72	2,86	27,48	1,46	38,60	2,18	10,07		
8	80	5,5	9,0	3,0	8,63	52,68	2,47	83,56	3,11	21,80	1,59	30,90	2,17	6,78		
		6			9,38	56,97	2,47	90,40	3,11	23,54	1,58	33,40	2,19	7,36		
		7			10,85	65,31	2,45	103,66	3,09	26,97	1,58	38,30	2,23	8,51		
		8			12,30	73,36	2,44	116,39	3,08	30,32	1,57	43,00	2,27	9,65		
		10			15,14	88,58	2,42	140,31	3,04	36,85	1,56	56,70	2,35	11,88		
		12			17,90	102,74	2,40	162,27	3,01	43,21	1,55	59,50	2,42	14,05		
9	90	6	10,0	3,3	10,61	82,10	2,78	130,00	3,50	33,97	1,79	48,10	2,43	8,33		
		7			12,28	94,30	2,77	149,67	3,49	38,94	1,78	55,40	2,47	9,64		
		8			13,93	106,11	2,76	168,42	3,48	43,80	1,77	62,30	2,51	10,93		
		9			15,60	118,00	2,75	186,00	3,46	48,60	1,77	68,00	2,55	12,20		
		10			17,17	128,60	2,74	203,93	3,45	53,27	1,76	75,30	2,59	13,48		
		12			20,33	149,67	2,71	235,88	3,41	62,40	1,75	86,20	2,67	15,96		
10	100	6,5	12,0	4,0	12,82	122,10	3,09	193,46	3,89	50,73	1,99	71,40	2,68	10,06		
		7			13,75	130,59	3,08	207,01	3,88	54,16	1,98	76,40	2,71	10,79		
		8			15,60	147,19	3,07	233,46	3,87	60,92	1,98	86,30	2,75	12,25		
		10			19,24	178,95	3,05	283,83	3,84	74,08	1,96	110,00	2,83	15,10		
		12			22,80	208,90	3,03	330,95	3,81	86,87	1,95	122,00	2,91	17,90		
		14			26,28	237,15	3,00	374,98	3,78	99,32	1,94	138,00	2,99	20,63		
		15			27,99	250,68	2,99	395,87	3,76	105,48	1,94	145,00	3,03	21,97		
		16			29,68	263,82	2,98	416,04	3,74	111,61	1,94	152,00	3,05	23,30		
11	110	7	12,0	4,0	15,15	175,61	3,40	278,54	4,29	72,68	2,19	106,00	2,96	11,87		

Окончание табл. П1

Номер уголка	Размеры уголка, мм				Пло- щадь попе- речного сечения, см^2	Справочные величины для осей								Масса 1 м уголка, кг		
	b	t	R	r		$x - x$		$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		J_{xy} , см^4	z_0 , см			
						J_x , см^4	i_x , см	$J_{x_0 \max}$, см^4	$i_{x_0 \max}$, см	$J_{y_0 \min}$, см^4	$i_{y_0 \min}$, см					
12	120	6	14,0	4,5	17,20	198,17	3,39	314,51	4,28	81,83	2,18	116,00	3,00	13,50		
		8			18,80	259,75	3,72	412,45	4,68	107,04	2,39	153,00	3,25	14,76		
		10			23,24	317,16	3,69	503,79	4,66	130,54	2,37	187,00	3,33	18,24		
		12			27,60	371,80	3,67	590,28	4,62	153,33	2,36	218,00	3,41	21,67		
		15			33,89	448,90	3,63	711,32	4,57	186,48	3,34	262,00	3,53	26,68		
12,5	125	8	14,0	4,6	19,69	294,36	3,87	466,76	4,87	121,96	2,49	172,00	3,36	15,46		
		9			22,00	327,48	3,86	520,00	4,86	135,88	2,48	192,00	3,40	17,30		
		10			24,33	359,82	3,85	571,04	4,84	148,59	2,47	211,00	3,45	19,10		
		12			28,89	422,23	3,82	670,02	4,82	174,43	2,46	248,00	3,53	22,68		
		14			33,37	481,76	3,80	763,90	4,78	199,62	2,45	282,00	3,61	26,20		
		16			37,77	538,56	3,78	852,84	4,75	224,29	2,44	315,00	3,68	29,65		
14	140	9	14,0	4,6	24,72	465,72	4,34	739,42	5,47	192,03	2,79	274,00	3,78	19,41		
		10			27,33	512,29	4,33	813,62	5,46	210,96	2,78	301,00	3,82	21,45		
		12			32,49	602,49	4,31	956,98	5,43	248,01	2,76	354,00	3,90	25,50		
15	150	10	14,0	4,6	29,33	634,76	4,65	1008,56	5,86	260,97	2,98	374,00	4,07	23,02		
		12			34,89	747,48	4,63	1187,86	5,83	307,09	2,97	440,00	4,15	27,39		
		15			43,08	908,38	4,59	1442,60	5,79	374,17	2,95	534,00	4,27	33,82		
		18			51,09	1060,08	4,56	1680,92	5,74	439,24	2,93	621,00	4,38	40,11		
16	160	10	16,0	5,3	31,43	774,24	4,96	1229,10	6,25	319,38	3,19	455,00	4,30	24,67		
		11			34,42	844,21	4,95	1340,66	6,24	347,77	3,18	496,00	4,35	27,02		
		12			37,39	912,89	4,94	1450,00	6,23	375,78	3,17	537,00	4,39	29,35		
		14			43,57	1046,47	4,92	1662,13	6,20	430,81	3,16	615,00	4,47	33,97		
		16			49,07	1175,19	4,89	1865,73	6,17	484,64	3,14	690,00	4,55	38,52		
		18			54,79	1290,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	3,13	771,00	4,63	43,01		
		20			60,40	1418,85	4,85	2248,26	6,10	589,43	3,12	830,00	4,70	47,44		
18	180	11	16,0	5,3	38,80	1216,44	5,60	1933,10	7,06	499,78	3,59	716,00	4,85	30,47		
		12			42,19	1316,62	5,59	2092,78	7,04	540,45	3,58	776,00	4,89	33,12		
		15			52,18	1607,36	5,55	2554,99	7,00	659,73	3,56	948,00	5,01	40,96		
		18			61,99	1884,07	5,51	2992,69	6,95	775,44	3,54	1108,00	5,13	48,66		
		20			68,43	2061,11	5,49	3271,31	6,91	850,92	3,53	1210,00	5,20	53,72		
20	200	12	18,0	6,0	47,10	1822,78	6,22	2896,16	7,84	749,40	3,99	1073,00	5,37	36,97		
		13			50,85	1960,77	6,21	3116,18	7,83	805,35	3,98	1156,00	5,42	39,92		
		14			54,60	2097,00	6,20	3333,00	7,81	861,60	3,97	1236,00	5,46	42,80		
		16			61,98	2362,57	6,17	3755,39	7,78	969,74	3,96	1393,00	5,54	48,65		
		18			69,30	2620,64	6,15	4164,54	7,75	1076,74	3,94	1544,00	5,62	54,40		
		20			76,54	2871,47	6,12	4560,42	7,72	1181,92	3,93	1689,00	5,70	60,08		
		24			90,78	3350,66	6,08	5313,59	7,65	1387,73	3,91	1963,00	5,85	71,26		
		25			94,29	3466,21	6,06	5494,04	7,63	1438,38	3,91	2028,00	5,89	74,02		
22	220	14	21,0	7,0	111,54	4019,60	6,00	6351,05	7,55	1698,16	3,89	2332,00	6,07	87,56		
		16			60,38	2814,36	6,83	4470,15	8,60	1158,56	4,38	1655,00	5,91	47,40		
					68,58	3175,44	6,80	5045,37	8,58	1305,02	4,36	1862,00	6,02	53,83		
25	250	16	24,0	8,0	78,40	4717,10	7,76	7492,10	9,78	1942,09	4,98	2775,00	6,75	61,55		
		18			87,72	5247,24	7,73	8336,69	9,75	2157,78	4,96	3089,00	6,83	68,86		
		20			96,96	5764,87	7,71	9159,73	9,72	2370,01	4,94	3395,00	6,91	76,11		
		22			106,12	6270,32	7,69	9961,60	9,69	2579,04	4,93	3691,00	7,00	83,31		
		25			119,71	7006,39	7,65	11125,52	9,64	2887,26	4,91	4119,00	7,11	93,97		
		28			133,12	7716,86	7,61	12243,84	9,59	3189,89	4,90	4527,00	7,23	104,50		
		30			141,96	8176,51	7,59	12964,66	9,56	3388,98	4,89	4788,00	7,31	111,44		

Таблица П2

Уголки стальные горячекатаные неравнополочные (ГОСТ 8510-86)



B – ширина большей полки;
 b – ширина меньшей полки;
 t – толщина полки;
 R – радиус внутреннего закругления;
 r – радиус закругления полок;
 J – момент инерции;
 i – радиус инерции;
 x_0, y_0 – расстояние от центра тяжести до наружных граней полок;
 J_{xy} – центробежный момент инерции (абс. величина).

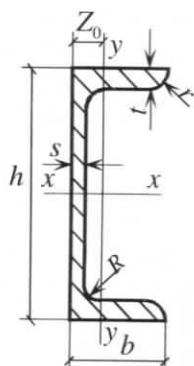
Номер уголка	Размеры уголка, мм					Площадь поперечного сечения, см ²	Справочные величины для осей								Угол наклона оси $\operatorname{tg}\alpha$, град	Масса 1 м уголка, кг		
							$x-x$		$y-y$		$u-u$		x_0 , см	y_0 , см	J_{xy} , см ⁴			
	B	b	t	R	r		J_x , см ⁴	i_x , см	J_y , см ⁴	i_y , см	J_u , см ⁴	i_u , см						
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,70	0,78	0,22	0,44	0,13	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392	0,91	
3/2	30	20	3	3,5	1,2	1,43	1,27	0,94	0,45	0,56	0,26	0,43	0,51	1,00	0,43	0,427	1,12	
			4			1,86	1,61	0,93	0,56	0,55	0,34	0,43	0,54	1,04	0,54	0,421	1,46	
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	0,28	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382	1,17	
			4			1,94	1,93	1,00	0,57	0,54	0,35	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374	1,52	
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	3,06	1,27	0,93	0,70	0,56	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385	1,48	
			4			2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	0,71	0,54	0,63	1,37	1,22	0,381	1,94	
			5			3,03	4,73	1,25	1,41	0,68	0,86	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374	2,38	
4/3	40	30	4	4,0	1,3	2,67	4,18	1,25	2,01	0,87	1,09	0,64	0,78	1,28	1,68	0,544	2,09	
			5			3,28	5,04	1,24	2,41	0,86	1,33	0,64	0,82	1,32	2,00	0,539	2,57	
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	4,41	1,43	1,32	0,79	0,79	0,61	0,64	1,47	1,38	0,382	1,68	
			4			2,80	5,68	1,42	1,69	0,78	1,02	0,60	0,68	1,51	1,77	0,379	2,20	
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	6,18	1,60	1,99	0,91	1,18	0,70	0,72	1,60	2,01	0,403	1,90	
			4			3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401	2,49	
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	11,37	1,78	3,70	1,02	2,19	0,78	0,84	1,82	3,74	0,406	2,81	
			5			4,41	13,82	1,77	4,48	1,01	2,65	0,78	0,88	1,87	4,50	0,404	3,46	
6,3/4,0	63	40	4	7,0	2,3	4,04	16,33	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397	3,17	
			5			4,98	19,91	2,00	6,26	1,12	3,73	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396	3,91	
			6			5,90	23,31	1,99	7,29	1,11	4,36	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393	4,63	
			8			7,68	29,60	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	1,07	2,20	9,27	0,386	6,03	
6,5/5	65	50	5	6,0	2,0	5,56	23,41	2,05	12,08	1,47	6,41	1,07	1,26	2,00	9,77	0,576	4,36	
			6			6,60	27,46	2,04	14,12	1,46	7,52	1,07	1,30	2,04	11,46	0,575	5,18	
			7			7,62	31,32	2,03	16,05	1,45	8,60	1,06	1,34	2,08	12,94	0,571	5,98	
			8			8,62	35,00	2,02	18,88	1,44	9,65	1,06	1,37	2,12	13,61	0,570	6,77	
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	27,76	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	1,05	2,28	9,12	0,406	4,39	
7,5/5	75	50	5	8,0	2,7	6,11	34,81	2,39	12,47	1,43	7,24	1,09	1,17	2,39	12,00	0,436	4,79	
			6			7,25	40,92	2,38	14,60	1,42	8,48	1,08	1,21	2,44	14,10	0,435	5,69	
			7			8,37	46,77	2,36	16,61	1,41	9,69	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435	6,57	
			8			9,47	52,38	2,35	18,52	1,40	10,87	1,07	1,29	2,52	17,80	0,430	7,43	

Окончание табл. II2

Номер уголка	Размеры уголка, мм					Площадь попечного сечения, см ²	Справочные величины для осей								Угол наклона оси тgα, град	Масса 1 м уголка, кг			
	B	b	t	R	r		x-x		y-y		u-u		x ₀ , см	y ₀ , см	J _{xy} , см ⁴				
							J _x , см ⁴	i _x , см	J _y , см ⁴	i _y , см	J _{u min} , см ⁴	i _u , см							
8/5	80	50	5	8,0	2,8	6,3 7,55	41,64 48,98	2,56 2,55	12,68 14,85	1,41 1,40	7,57 8,88	1,09 1,08	1,13 1,17	2,60 2,65	13,20 15,50	0,387 0,386	4,99 5,92		
			6																
8/6	80	60	6	8,0	2,9	8,15 9,42 10,67	52,06 59,61 66,88	2,53 2,52 2,50	25,18 28,74 32,15	1,76 1,75 1,74	13,61 15,58 17,49	1,29 1,29 1,28	1,49 1,53 1,57	2,47 2,52 2,56	20,98 24,01 26,83	0,547 0,546 0,544	6,39 7,39 8,37		
			7																
			8																
9/5,6	90	56	5,5	9,0	3,0	7,86 8,54 11,18	65,28 70,58 90,87	2,88 2,88 2,85	19,67 21,22 27,08	1,58 1,58 1,56	11,77 12,70 16,29	1,22 1,22 1,21	1,2 1,28 1,36	2,92 2,95 3,04	20,54 22,23 28,33	0,384 0,384 0,380	6,17 6,70 8,77		
			6																
			8																
10/6,3	100	63	6	10,0	3,3	9,58 11,09 12,57 15,47	98,29 112,86 126,96 153,83	3,20 3,19 3,18 3,15	30,58 34,99 39,21 47,18	1,79 1,78 1,77 1,75	18,20 20,83 23,38 28,34	1,38 1,37 1,36 1,35	1,42 1,46 1,50 1,58	3,23 3,28 3,32 3,40	31,50 36,10 40,50 48,60	0,393 0,392 0,391 0,387	7,53 8,70 9,87 12,14		
			7																
			8																
			10																
10/6,5	100	65	7	10,0	3,4	11,23 12,73 15,67	114,05 138,31 155,52	3,19 3,18 3,15	38,32 42,96 51,68	1,85 1,84 1,82	22,77 25,24 30,60	1,41 1,41 1,40	1,52 1,56 1,64	3,24 3,28 3,37	38,00 42,64 51,18	0,415 0,414 0,410	8,81 9,90 12,30		
			8																
			10																
11/7	110	70	6,5	10,0	3,5	11,45 13,93	142,42 171,54	3,53 3,51	45,61 54,64	2,00 1,98	26,94 32,31	1,53 1,52	1,58 1,64	3,55 3,61	46,80 55,90	0,402 0,400	8,98 10,93		
			8																
12,5/8	125	80	7	11,0	3,7	14,06 15,98 19,70 23,36	226,53 255,62 311,61 364,79	4,01 4,00 3,98 3,95	73,73 80,95 100,47 116,84	2,29 2,28 2,26 2,24	43,40 48,82 59,33 69,47	1,76 1,75 1,74 1,72	1,80 1,84 1,92 2,00	4,01 4,04 4,14 4,22	74,70 84,10 102,00 118,00	0,407 0,406 0,404 0,400	11,04 12,54 15,47 18,34		
			8																
			10																
			12																
14/9	140	90	8	12,0	4,0	18,00 22,24	363,68 444,65	4,49 4,47	119,79 145,54	2,58 2,56	70,47 85,51	1,98 1,96	2,03 2,12	4,49 4,58	121,00 147,00	0,411 0,409	14,13 17,46		
			10																
16/10	160	100	9	13,0	4,3	22,87 25,28 30,04 34,72	605,97 666,59 784,22 897,19	5,15 5,13 5,11 5,08	186,03 204,09 238,75 271,60	2,85 2,84 2,82 2,80	110,40 121,16 142,14 162,49	2,20 2,19 2,18 2,16	2,24 2,28 2,36 2,43	5,19 5,23 5,32 5,40	194,00 213,00 249,00 282,00	0,391 0,390 0,388 0,385	17,95 19,85 23,58 27,26		
			10																
			12																
			14																
18/11	180	110	10	14,0	4,7	28,33 33,69	952,28 1122,56	5,80 5,77	276,37 324,09	3,12 3,10	165,44 194,28	2,42 2,40	2,44 2,52	5,88 5,97	295,00 348,00	0,376 0,374	22,24 26,45		
			12																
20/12,5	200	125	11			34,87 37,89 43,87 49,77	1449,62 1568,19 1800,83 2026,08	6,45 6,43 6,41 6,38	446,36 481,93 550,77 616,66	3,58 3,57 3,54 3,52	263,84 285,04 326,54 365,99	2,75 2,74 2,73 2,72	2,79 2,83 2,91 2,99	6,50 6,54 6,62 6,71	465,00 503,00 575,00 643,00	0,392 0,392 0,390 0,388	27,37 29,74 34,43 39,07		
			12																
			14																
			16																

Таблица П3

Швеллеры стальные горячекатаные (ГОСТ 8240-89). С параллельными гранями полок

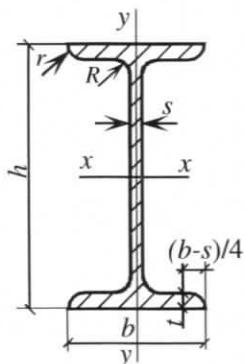


h – высота;
 b – ширина полки;
 s – толщина стенки;
 t – толщина полки;
 R – радиус внутреннего закругления;
 r – радиус закругления полки;
 J – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 i – радиус инерции;
 S – статический момент полусечения;
 Z_0 – расстояние от оси $y-y$ до наружной грани стенки.

Номер швеллера	Размеры швеллера, мм						Площадь сечения, см ²	Масса 1 м швеллера, кг	Справочные величины для осей						Z_0 , см		
	h	b	s	t	R	r			$x-x$			$y-y$					
									J_x , см ⁴	W_{x_2} , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_{y_2} , см ³	i_y , см		
5	50	32	4,4	7,0	6,0	3,5	6,16	4,84	22,8	9,14	1,92	5,61	5,95	2,99	0,983	1,21	
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	3,5	7,51	5,90	48,8	15,00	2,55	9,02	9,35	4,06	1,120	1,29	
8	80	40	4,5	7,4	6,5	3,5	8,98	7,05	89,8	22,50	3,16	13,30	13,90	5,31	1,240	1,38	
10	100	46	4,5	7,6	7,0	4,0	10,90	8,59	175,0	34,90	3,99	20,50	22,60	7,37	1,440	1,53	
12	120	52	4,8	7,8	7,5	4,5	13,30	10,40	305,0	50,80	4,79	29,70	34,90	9,84	1,620	1,66	
14	140	58	4,9	8,1	8,0	4,5	15,60	12,30	493,0	70,40	5,61	40,90	51,50	12,90	1,810	1,82	
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	4,5	17,00	13,30	547,0	78,20	5,68	45,20	65,20	15,70	1,960	1,97	
16	160	64	5,0	8,4	8,5	5,0	18,10	14,20	750,0	93,80	6,44	54,30	72,80	16,40	2,000	2,04	
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	5,0	19,50	15,30	827,0	103,00	6,51	59,50	90,50	19,60	2,150	2,19	
18	180	70	5,1	8,7	9,0	5,0	20,70	16,30	1090,0	121,00	7,26	70,00	100,00	20,60	2,200	2,14	
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	5,0	22,20	17,40	1200,0	133,00	7,34	76,30	123,00	24,30	2,350	2,36	
20	200	76	5,2	9,0	9,5	5,5	23,40	18,40	1530,0	153,00	8,08	88,00	134,00	25,20	2,390	2,30	
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	5,5	25,20	19,80	1680,0	168,00	8,17	96,20	162,00	29,70	2,540	2,53	
22	220	82	5,4	9,5	10,0	6,0	26,70	21,00	2120,0	193,00	8,90	111,00	178,00	31,00	2,580	2,47	
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	6,0	28,80	22,60	2340,0	212,00	9,01	121,00	220,00	37,00	2,770	2,75	
24	240	90	5,6	10,0	10,5	6,0	30,60	24,00	2910,0	243,00	9,75	139,00	248,00	39,50	2,850	2,72	
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	6,0	32,90	25,80	3200,0	266,00	9,86	152,00	302,00	46,50	3,030	3,01	
27	270	95	6,0	10,5	11,0	6,5	35,20	27,70	4180,0	310,00	10,90	178,00	314,00	46,70	2,990	2,78	
30	300	100	6,5	11,0	12,0	7,0	40,50	31,80	5830,0	389,00	12,00	224,00	393,00	54,80	3,120	2,83	
33	330	105	7,0	11,7	13,0	7,5	46,50	36,50	8010,0	486,00	13,10	281,00	491,00	64,60	3,250	2,90	
36	360	110	7,5	12,6	14,0	8,5	53,40	41,90	10850,0	603,00	14,30	350,00	611,0	76,30	3,380	2,99	
40	400	115	8,0	13,5	15,0	9,0	61,50	48,30	15260,0	763,00	15,80	445,00	760,00	89,90	3,510	3,05	

Таблица П4

Двутавры стальные горячекатаная (ГОСТ 8239-89)



h – высота балки;
 b – ширина полки;
 s – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 R – радиус внутреннего закругления;
 r – радиус закругления полки;
 J – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 i – радиус инерции;
 S – статический момент полусечения.

Но- мер бал- ки	Размеры балки, мм						Пло- щадь сече- ния, см^2	Масса 1 м дву- тавра, кг	Справочные величины для осей							
									х – х				у – у			
	h	b	s	t	R	r			J_x , см^4	W_x , см^3	i_x , см	S_x , см^3	J_y , см^4	W_y , см^3	i_y , см	
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55	
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70	
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88	
18a	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	19,90	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12	
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07	
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32	
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27	
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50	
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37	
24a	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,40	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63	
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54	
27a	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,90	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80	
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69	
30a	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,20	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95	
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79	
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89	
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03	
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09	
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23	
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39	
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54	

Содержание

Указания к выполнению и оформлению контрольных работ	3
Обозначение величин и их единицы	5
Программа теоретического курса «Сопротивление материалов». Часть I	6
1. Растижение-сжатие стержня	8
Задача 1. Расчет продольных сил, напряжений и деформаций	8
Задача 2. Расчет усилий, напряжений и деформаций в стержневых системах	12
Задача 3. Расчет стержневых систем на прочность	16
Задача 4. Учет собственного веса стержня	20
2. Статически неопределеные системы	24
Задача 5. Расчет статически неопределенного ступенчатого стержня	24
Задача 6. Расчет статически неопределенной стержневой системы	29
3. Напряженно-деформированное состояние в точке тела	34
Задача 7. Анализ плоского напряженного состояния	34
Задача 8. Анализ деформированного состояния параллелепипеда	38
4. Сдвиг. Практические методы расчета соединений	40
Задача 9. Расчет заклепочного соединения	40
Задача 10. Расчет сварных соединений	44
5. Геометрические характеристики сечений	48
Задача 11. Расчет моментов инерции сечения, имеющего две оси симметрии	48
Задача 12. Расчет моментов инерции сечения, имеющего одну ось симметрии	52
Задача 13. Расчет моментов инерции сечения, не имеющего осей симметрии	57
6. Кручение стержней	62
Задача 14. Расчет вала на прочность и жесткость	62
7. Плоский изгиб балок	67
Задача 15. Расчет консольной балки	67
Задача 16. Расчет балки на двух опорах	71
Библиографический список	75
Приложение. Сортамент стального проката	76

Учебное издание

*Агуленко Виктор Николаевич
Кутовой Виктор Петрович
Маслов Евгений Борисович
Тихомиров Виктор Михайлович
Шабанов Александр Петрович*

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Сборник задач
Часть I

Редактор *Е.Е. Рыжкова*
Компьютерная верстка *Т.А. Соловьевой*
Дизайн обложки *А.С. Петренко*

Изд. лиц. ЛР № 021277 от 06.04.98.

Подписано в печать 17.10.2013.

10,5 печ. л.

7,5 уч.-изд. л.

Тираж 200 экз.

Заказ № 2689

Издательство Сибирского государственного университета путей сообщения
630049, Новосибирск, ул. Д. Ковальчук, 191
Тел. (383) 328-03-81. E-mail: bvu@stu.ru