

С.В.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Сборник задач
Часть II



Новосибирск
2015

УДК 539.8
ББК 30.121
С232

Сопротивление материалов : сборник задач / В. Н. Агуленко, Е. Б. Маслов, В. М. Тихомиров, А. П. Шабанов. – Новосибирск : Изд-во СГУПС, 2015. – Ч. II. – 90 с.
ISBN 978-5-93461-603-9
ISBN 978-5-93461-671-8 (Ч. II)

В сборнике приведены условия и расчетные схемы задач, а также указания по выбору исходных данных, индивидуальных для каждого студента; рассмотрены примеры решения типовых задач и оформления расчетов; даны таблицы сортамента стального проката и список необходимой литературы.

Предназначен для самостоятельной работы студентов заочного факультета, обучающихся по дисциплинам «Сопротивление материалов», «Прикладная механика» и «Техническая механика».

УДК 539.8
ББК 30.121

Утвержден к изданию редакционно-издательским советом университета.

Ответственный редактор
д-р техн. наук, проф. *В.М. Тихомиров*

Рецензенты:

кафедра «Сопротивление материалов и строительная механика» Новосибирской академии водного транспорта (завкафедрой канд. техн. наук, доц. *Ю.И. Ришко*)
завкафедрой «Строительная механика» Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета д-р техн. наук, проф. *Г.И. Гребенюк*

ISBN 978-5-93461-603-9
ISBN 978-5-93461-671-8 (Ч. II)

© Сибирский государственный университет путей сообщения, 2015
© Агуленко В.Н., Маслов Е.Б., Тихомиров В.М., Шабанов А.П., 2015

Указания к выполнению и оформлению контрольных работ

Контрольные работы выполняются в соответствии со своей специальностью (направлением).

Специальность, направление	Дисциплина	Номера задач		
		Контрольная работа № 1	Контрольная работа № 2	Контрольная работа № 3
Строительство железных дорог, мостов и транспортных тоннелей	Сопротивление материалов	2, 4	6, 7, 8	10, 11, 14
Наземные транспортно-технологические средства	Сопротивление материалов	1, 4, 6	8, 9	11, 13
Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов	Сопротивление материалов	1, 5, 8	9, 11, 13	–
Строительство: Промышленное и гражданское строительство Водоснабжение и водоотведение Автомобильные дороги	Техническая механика	2, 3, 5	7, 11, 12	–

Каждая контрольная работа оформляется в отдельной тетради, от руки, с полями в 5 см для пометок рецензента. На обложке тетради должны быть указаны следующие данные:

Кафедра «Строительная механика»

Дисциплина _____

Контрольная работа № _____

Шифр студента _____

ФИО студента _____

Адрес студента _____

Перед решением задачи необходимо ознакомиться с правилами выбора варианта расчетной схемы и исходных числовых данных.

Исходные данные выбираются из таблиц, приведенных к каждой задаче, по первой букве имени и фамилии студента (см. примеры решения). Номер расчетной схемы задачи необходимо определить по учебному шифру студента. Например, расчетную схему № 1 выбирают студенты, имеющие шифр 01, 31, 61 и т.д.

При получении проверенной, но незачтенной работы студент должен исправить ошибки по замечаниям рецензента. Исправления, сделанные на отдельных листах, следует вложить (или вклеить) в соответствующие места прорецензированной работы. Отдельно от работы исправления не рассматриваются. К исправленной работе должна быть приложена предыдущая рецензия.

Задачи, выполненные по исходным данным, не соответствующим шифру и фамилии студента, не рецензируются (не проверяются). Также не рецензируются и не возвращаются студенту контрольные работы, решенные на компьютере и распечатанные на принтере.

Порядок оформления контрольной работы

1. Решение каждой задачи необходимо начинать с новой страницы. В заголовке решения записывается номер задачи и вариант расчетной схемы. Ниже помещается таблица исходных данных.
2. Расчеты выполнять чернилами, чертежи мягким карандашом, с указанием всех необходимых размеров, соблюдая масштаб.
3. Каждый этап решения задачи должен быть озаглавлен. Расчеты сопровождаются краткими пояснениями и необходимыми расчетными схемами.
4. Оформление вычислений производится в следующем порядке: записать алгебраическую формулу, подставить данные в единицах системы СИ и без промежуточных вычислений записать результат с обязательным указанием его размерности. Результаты округлять до третьей значащей цифры.

Обозначение величин и их единицы измерения

	Обозначение	Наименование величины	Единицы Международной системы (СИ)	
Геометрические характеристики	a, b, h, d, l	Линейные размеры стержня	м	
	A	Площадь	м ²	
	S_x, S_y	Статические моменты площади	м ³	
	J_x, J_y	Осевые моменты инерции сечения	м ⁴	
	J_{xy}	Центробежный момент инерции сечения	м ⁴	
	W_z	Момент сопротивления сечения (относительно оси z)	м ³	
Нагрузки	P, F	Сосредоточенная сила	Н (ньютон)	
	S_1, S_2	Усилия в ветвях ременной передачи	Н	
	q	Интенсивность нагрузки, распределенной по линии	Н/м	
	m	Сосредоточенный момент (пара сил)	Н·м	
Внутренние усилия	N	Продольная сила	Н	
	Q_x, Q_y	Поперечные силы	Н	
	M_x, M_y	Изгибающие моменты	Н·м	
	$M_{кр}$	Крутящий момент	Н·м	
Напряжения	σ	Нормальное напряжение	Па	
	τ	Касательное напряжение	Па	
	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Главные напряжения	Па	
	E	Модуль упругости (модуль Юнга)	Па	
Механические характеристики материалов	G	Модуль сдвига	Па	
	α	Температурный коэффициент линейного расширения	1/град	
	ν	Коэффициент Пуассона	—	
	$\sigma_{ш}$	Предел пропорциональности	Па	
	σ_T	Предел текучести	Па	
	σ_B	Предел прочности (временное сопротивление)	Па	
	R_y	Расчетное сопротивление на растяжение по пределу текучести	Па	
	Деформации	Δl	Изменение длины (удлинение), абсолютная деформация	м
		ϵ	Относительная линейная деформация	—
γ		Угловая деформация (угол сдвига)	рад (радиан)	
θ		Угол поворота сечения	рад (радиан)	
Перемещения	δ, Δ	Перемещение точки (сечения)	м	
	u	Перемещение точки по оси x	м	
	v	Перемещение точки по оси y	м	
	w	Перемещение точки по оси z	м	

Программа теоретического курса «Сопrotивление материалов». Часть II

1. Перемещения сечений балок (прогиб и угол поворота). Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.
2. Определение прогибов и углов поворота сечений методом начальных параметров.
3. Интеграл Мора. Определение прогибов и углов поворота сечений методом единичных нагрузок.
4. Расчет статически неопределимых балок методом сил и методом сравнения деформаций.
5. Сложное сопротивление стержней.
6. Расчет балок при косом изгибе: определение изгибающих моментов, положения нулевой линии, нормальных напряжений и перемещения сечений.
7. Совместное действие изгиба и растяжения (сжатия): построение эпюр внутренних усилий, определение положения нулевой линии и расчет напряжений.
8. Внецентренное действие продольной силы: определение напряжений и положения нулевой линии.
9. Построение ядра сечения.
10. Предельное состояние материала: III и IV теории прочности. Основные предпосылки и расчетные формулы для условий прочности.
11. Изгиб с кручением круглых валов: внутренние усилия, нормальные и касательные напряжения в поперечном сечении и напряженное состояние в опасных точках.
12. Условие прочности при изгибе с кручением круглых валов по III и IV теориям прочности. Расчетный момент и эквивалентное напряжение.
13. Устойчивость сжатых стержней. Формула Эйлера для определения критических нагрузок с учетом различных способов закрепления концов стержня.
14. Предел применимости формулы Эйлера. Критические напряжения по Эйлеру и Ясинскому, диаграмма критических напряжений.
15. Практические расчеты сжатых стержней на устойчивость: условие устойчивости, определение допускаемых нагрузок и подбор размеров поперечного сечения стойки.
16. Динамическое действие нагрузок. Виды динамических нагрузок. Расчет конструкций с учетом сил инерции.
17. Ударное действие нагрузок. Техническая теория удара. Удар падающего тела по упругой невесомой конструкции: схема расчета, динамический коэффициент и условие прочности.
18. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы: определение динамического коэффициента, усилий, деформаций и напряжений.
19. Усталость металлов: циклическое нагружение, кривая усталости, предел выносливости.
20. Расчет на выносливость. Диаграмма предельных амплитуд материала и ее использование для нахождения коэффициентов запаса выносливости.

1. Перемещения при изгибе балок

Задача 1. Определение перемещений методом единичных нагрузок

В учебнике [1] – § 7.5, в пособии [3] – тема 13.

Условие. Консольная балка переменного сечения нагружена равномерно распределенной нагрузкой и сосредоточенными силой и моментом.

Требуется:

1. Построить эпюру изгибающих моментов от внешней нагрузки M_p .
2. Методом единичных нагрузок определить прогиб и угол поворота сечения A , считая жесткость на одном участке балки равной EJ_0 , на другом – EJ . Принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $J_0 = 1 \cdot 10^4$ см⁴.

Алфавит	a , м	m , кН·м	P , кН	q , кН/м	J/J_0
	1	2	3	4	5
<i>а б в</i>	0,5	24	4	4	1,5
<i>г д е ё</i>	0,6	22	6	5	2,0
<i>ж з и й</i>	0,7	20	8	6	2,5
<i>к л м</i>	0,8	18	10	7	3,0
<i>н о п</i>	1,0	16	12	8	3,5
<i>р с т</i>	1,2	14	14	4	4,0
<i>у ф х</i>	1,4	12	16	5	1,5
<i>ц ч ш щ</i>	1,5	10	20	6	2,0
<i>ъ ы ь</i>	0,5	8	22	7	2,5
<i>э ю я</i>	0,6	6	24	8	3,0

Варианты расчетных схем

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По своей фамилии и имени (например, С. Ивлев) выбираем данные и заносим в таблицу. По учебному шифру выбираем вариант расчетной схемы балки.

С.	И	В	Л	е	в
1	2	3	4	5	
$a, \text{ м}$	$m, \text{ кН}\cdot\text{м}$	$P, \text{ кН}$	$q, \text{ кН/м}$	J/J_0	
1,2	20	4	7	2,0	

Изобразим расчетную схему, соблюдая масштаб длин (рис. 1).

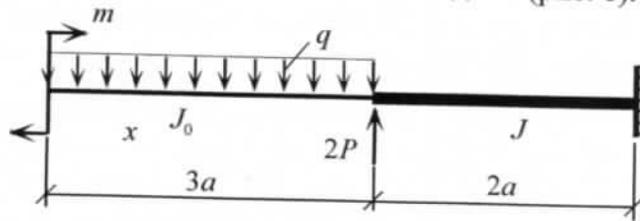


Рис. 1. Расчетная схема балки

2. Определение изгибающих моментов M_p

Для определения перемещений методом единичных нагрузок необходимо построить эпюру изгибающих моментов M_p , возникающих от внешней нагрузки (рис. 2).

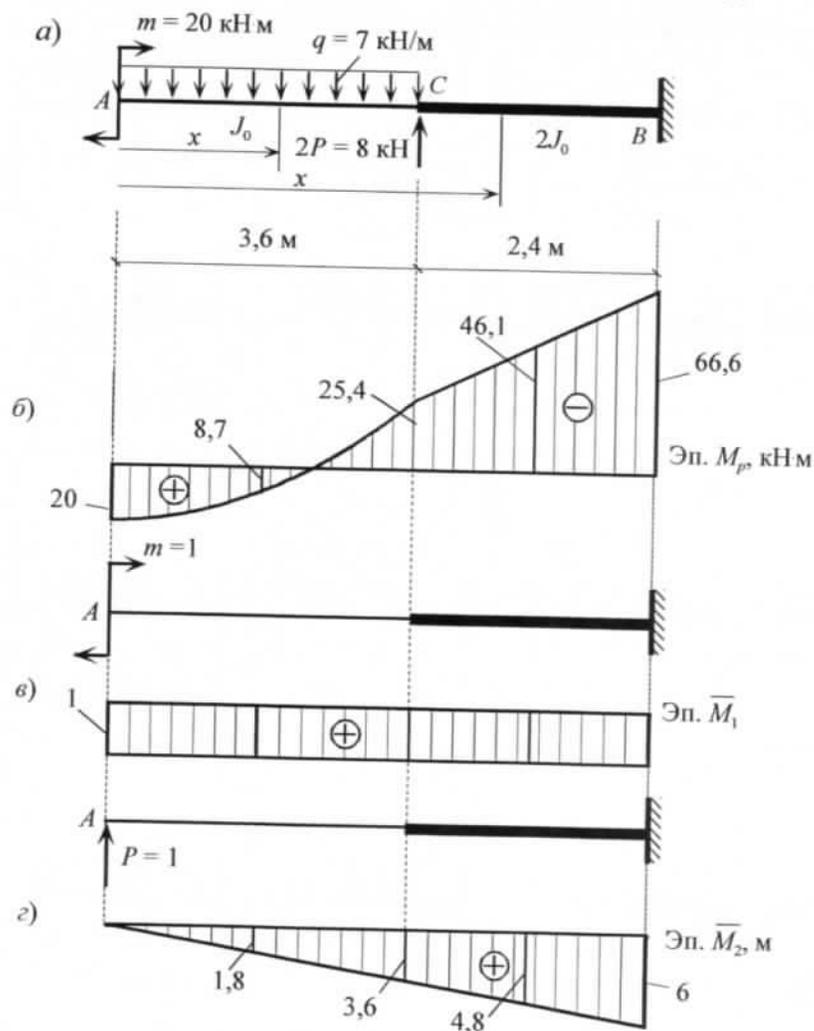


Рис. 2. Расчетная схема балки (а), эпюры моментов от заданной (б) и единичных нагрузок (в, г)

Определим значения изгибающих моментов M_p в сечениях, расположенных на границах и посередине участков AC и CB .

Участок AC

$$0 \leq x \leq 3,6 \text{ м}; M_p = -q \frac{x^2}{2} + m.$$

$$\text{При } x = 0 \quad M_p = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; \text{ при } x = 1,8 \text{ м} \quad M_p = -7 \frac{1,8^2}{2} + 20 = 8,7 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } x = 3,6 \text{ м} \quad M_p = -7 \frac{3,6^2}{2} + 20 = -25,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок CB

$$3,6 \text{ м} \leq x \leq 6 \text{ м}; M_p = -3,6q(x-1,8) + m + 2P(x-3,6).$$

$$\text{При } x = 3,6 \text{ м} \quad M_p = -3,6 \cdot 7(3,6-1,8) + 20 = -25,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } x = 4,8 \text{ м} \quad M_p = -3,6 \cdot 7(4,8-1,8) + 20 + 2 \cdot 4(4,8-3,6) = -46,1 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } x = 6 \text{ м} \quad M_p = -3,6 \cdot 7(6-1,8) + 20 + 2 \cdot 4(6-3,6) = -66,6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По данным расчета строим грузовую эпюру M_p (см. рис. 2, б).

3. Определение угла поворота и прогиба методом единичных нагрузок

Для определения угла поворота сечения A на расчетную схему в этом сечении прикладываем единичный момент $m = 1$ и строим эпюру единичных моментов \bar{M}_1 (см. рис. 2, в). Далее по формуле Симпсона (13.3) [3], определяем угол поворота сечения A

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{3,6}{6EJ_0} (20 \cdot 1 + 4 \cdot 8,7 \cdot 1 - 25,4 \cdot 1) + \frac{2,4}{6E(2J_0)} (-25,4 \cdot 1 - 4 \cdot 46,1 \cdot 1 - 66,6 \cdot 1) = \\ &= -\frac{37,6}{EJ_0} = -\frac{37,6 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 10^4 \cdot 10^{-8}} = -1,88 \cdot 10^{-3} \text{ рад.} \end{aligned}$$

При вычислении учтено, что жесткость на участках балки разная: на участке AC она равна EJ_0 , а на участке CB — $E(2J_0)$.

Знак «минус» означает, что направление угла поворота сечения A не совпадает с направлением приложенного единичного момента $m = 1$. Таким образом, сечение A поворачивается *против хода часовой стрелки*.

Для определения прогиба v_A в точке A приложим единичную силу $P = 1$ и построим эпюру единичных моментов \bar{M}_2 , на которой отметим моменты, соответствующие крайним и средним сечениям участков AC и BC (см. рис. 2, г).

Участок AB

$$0 \leq x \leq 6 \text{ м}; \bar{M}_2 = Px = x.$$

$$\text{При } x = 0 \quad \bar{M}_2 = 0; \text{ при } x = 1,8 \text{ м} \quad \bar{M}_2 = 1,8 \text{ м}; \text{ при } x = 3,6 \text{ м} \quad \bar{M}_2 = 3,6 \text{ м};$$

$$\text{при } x = 4,8 \text{ м} \quad \bar{M}_2 = 4,8 \text{ м}; \text{ при } x = 6,0 \text{ м} \quad \bar{M}_2 = 6,0 \text{ м}.$$

По формуле Симпсона определим вертикальное перемещение точки A (прогиб v_A):

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{3,6}{6EJ_0} (20 \cdot 0 + 4 \cdot 8,7 \cdot 1,8 - 25,4 \cdot 3,6) + \frac{2,4}{6E(2J_0)} (-25,4 \cdot 3,6 - 4 \cdot 46,1 \cdot 4,8 - 66,6 \cdot 6) = \\ &= -\frac{2923}{EJ_0} = -\frac{2923 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 10^4 \cdot 10^{-8}} = -1,46 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -1,46 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Знак «минус» означает, что направление прогиба балки не совпадает с направлением приложенной единичной силы $P = 1$. Таким образом, точка A переместится вниз.

Задача 2. Определение перемещений в балках методом начальных параметров

В учебнике [1] – § 7.4, в пособии [3] – тема 12.

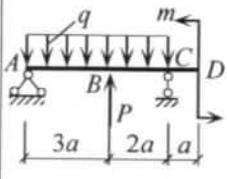
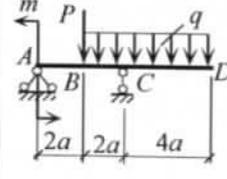
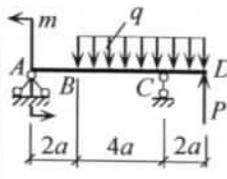
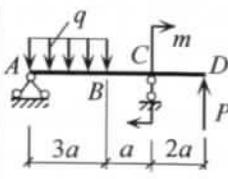
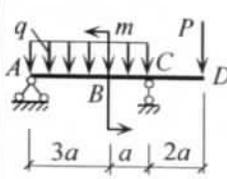
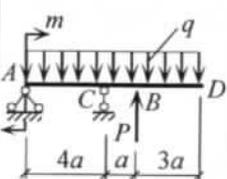
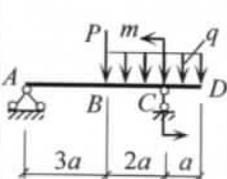
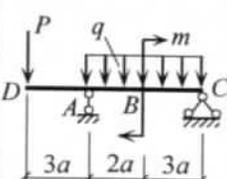
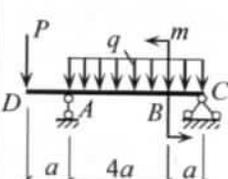
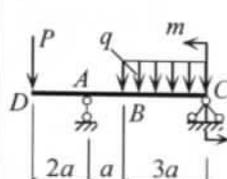
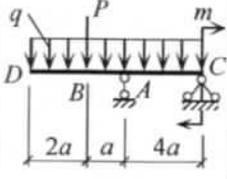
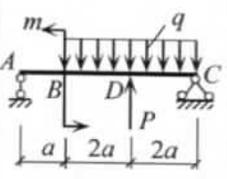
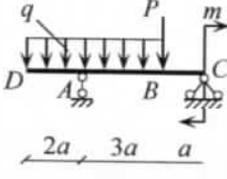
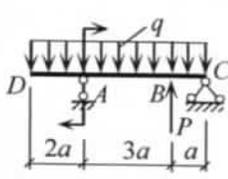
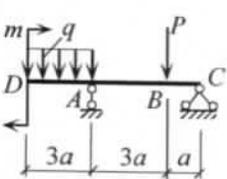
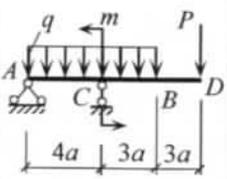
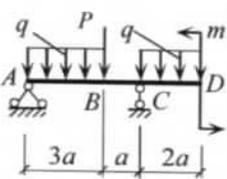
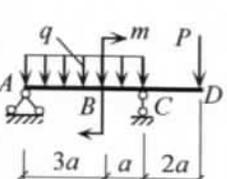
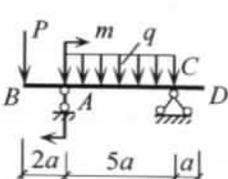
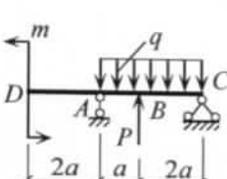
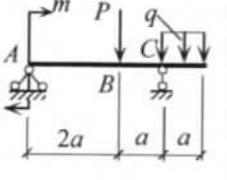
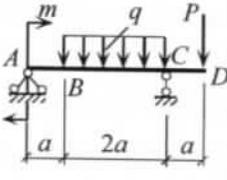
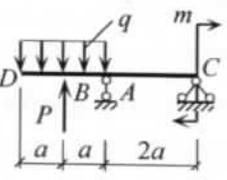
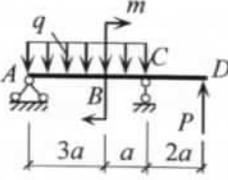
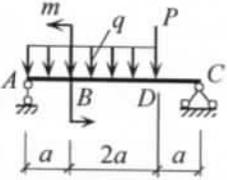
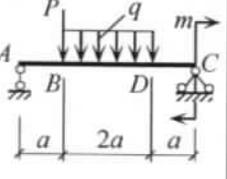
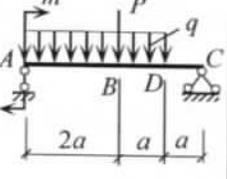
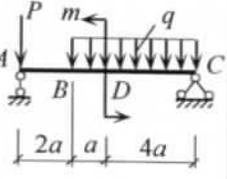
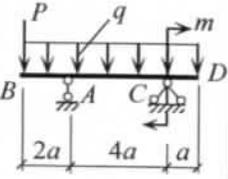
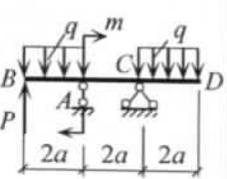
Условие. Балка на двух шарнирных опорах нагружена распределенной нагрузкой, сосредоточенной силой и моментом.

Требуется:

1. Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .
2. Из условия прочности подобрать номер двутавра, принимая расчетное сопротивление стали $R_y = 210$ МПа.
3. Методом начальных параметров определить перемещение сечения B и угол поворота сечения A . Модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Алфавит	m , кН·м	P , кН	q , кН/м	a , м
	1	2	3	4
<i>а б в</i>	6	24	5	0,5
<i>г д е ё</i>	8	22	7	0,6
<i>ж з и й</i>	10	20	6	0,7
<i>к л м</i>	12	18	5	0,8
<i>н о п</i>	14	16	4	1,0
<i>р с т</i>	16	14	4	1,2
<i>у ф х</i>	18	12	5	1,4
<i>ц ч ш щ</i>	20	10	6	1,5
<i>ъ ы ь</i>	22	8	7	1,4
<i>э ю я</i>	24	6	8	1,2

Варианты расчетных схем

1 	2 	3 	4 	5 
6 	7 	8 	9 	10 
11 	12 	13 	14 	15 
16 	17 	18 	19 	20 
21 	22 	23 	24 	25 
26 	27 	28 	29 	30 

Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По имени и фамилии (например, С. Ивлев) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу. Вариант расчетной схемы выбираем в соответствии с учебным шифром студента.

С.	И	в	л	е	в
1	2	3	4	5	
m , кН·м	P , кН	q , кН/м	a , м		
16	20	5	0,8		

Изобразим расчетную схему балки, соблюдая масштаб длины участков (рис. 3, а). На схеме укажем числовые значения нагрузок и длину участков балки.

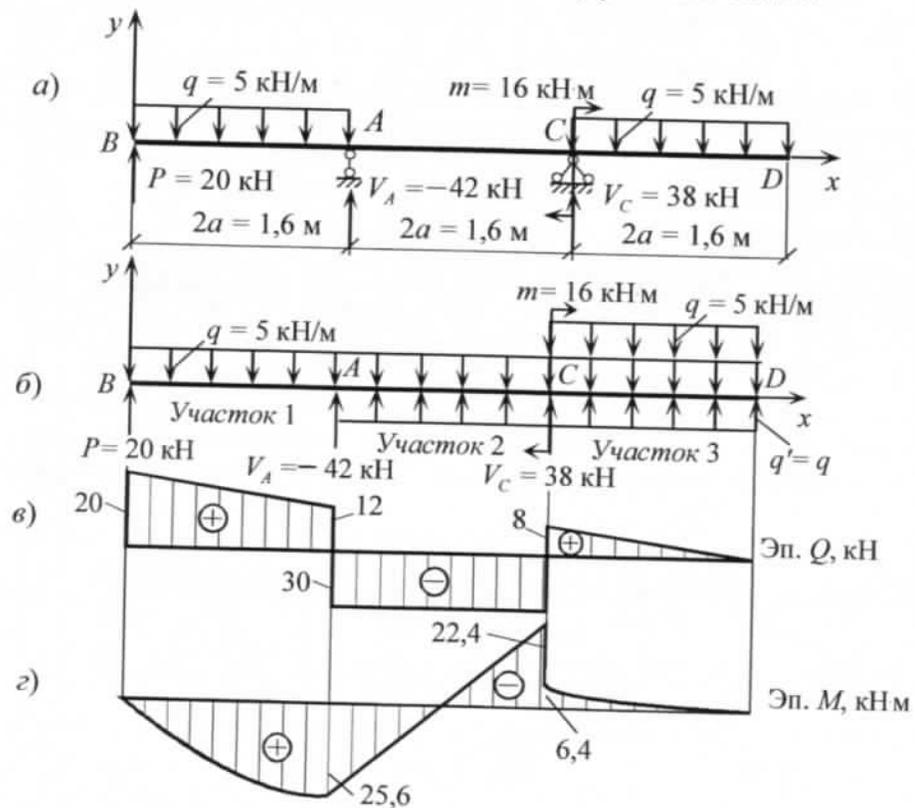


Рис. 3. Расчетная схема (а), приведенная расчетная схема (б), эпюры Q и M (в, з)

2. Построение эпюр поперечных сил Q и изгибающих моментов M

Определим из уравнений равновесия балки опорные реакции V_A и V_C , действующие в шарнирных опорах A и C (см. рис. 3, а):

$$\sum m_A = (q \cdot 2a)a - P \cdot 2a - m - (q \cdot 2a)3a + V_C \cdot 2a = 0,$$

откуда

$$V_C = \frac{-(5 \cdot 2 \cdot 0,8)0,8 + 20 \cdot 2 \cdot 0,8 + 16 + (5 \cdot 2 \cdot 0,8)3 \cdot 0,8}{2 \cdot 0,8} = 38 \text{ кН};$$

$$\sum m_C = (q \cdot 2a)3a - P \cdot 4a - m - (q \cdot 2a)a - V_A \cdot 2a = 0,$$

получим

$$V_A = \frac{(5 \cdot 2 \cdot 0,8)3 \cdot 0,8 - 20 \cdot 4 \cdot 0,8 - 16 - (5 \cdot 2 \cdot 0,8)0,8}{2 \cdot 0,8} = -42 \text{ кН}.$$

Определим значения Q и M в характерных сечениях 1, 2 и 3-го участков балки (см. рис. 3, б).

Участок 1

$$0 \leq x \leq 1,6 \text{ м}; Q_1 = P - qx, \quad M_1 = Px - q \frac{x^2}{2}.$$

При $x = 0$ $Q_1 = 20$ кН, $M_1 = 0$; при $x = 1,6$ м $Q_1 = 12$ кН, $M_1 = 25,6$ кН·м.

Участок 2

$$1,6 \text{ м} \leq x \leq 3,2 \text{ м}; Q_2 = P - 1,6q + V_A = 20 - 1,6 \cdot 5 + (-42) = -30 \text{ кН}, \\ M_2 = Px - 1,6q(x - 0,8) + V_A(x - 1,6).$$

При $x = 1,6$ м $M_2 = 25,6$ кН·м; при $x = 3,2$ м $M_2 = -22,4$ кН·м.

Участок 3

$$3,2 \text{ м} \leq x \leq 4,8 \text{ м}; Q_3 = P - 1,6q + V_A + V_C - q(x - 3,2),$$

$$M_3 = Px - 1,6q(x - 0,8) + V_A(x - 1,6) + V_C(x - 3,2) - q \frac{(x - 3,2)^2}{2} + m.$$

При $x = 3,2$ м $Q_3 = 8$ кН, $M_3 = -6,4$ кН·м; при $x = 4,8$ м $Q_3 = 0$, $M_3 = 0$.

По данным расчета строим эпюры Q и M (см. рис. 3, в, г).

3. Расчет на прочность

Из условия прочности балки на изгиб

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} \leq R_y$$

вычисляем требуемое значение момента сопротивления балки, учитывая, что на эпюре M (см. рис. 3, г) максимальное значение изгибающего момента $|M|_{\max} = 25,6$ кН·м:

$$W_z \geq \frac{|M|_{\max}}{R_y} = \frac{25,6 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 1,22 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 122 \text{ см}^3.$$

Из табл. А4 выбираем двутавр № 18, который имеет наиболее близкое к требуемому значение момента сопротивления: $W_z = 143 \text{ см}^3$. Момент инерции данного двутавра $J_z = 1\,290 \text{ см}^4$.

4. Определение углов поворота и прогибов в заданных сечениях

Углы поворота и прогибы сечений определяем методом начальных параметров (тема 12 в пособии [3]). Распределенную нагрузку, действующую только на первом участке, необходимо продлить до конца балки, а на втором и третьем участках приложить компенсирующую нагрузку, которая действует в противоположном направлении (см. рис. 3, б).

По формулам (12.6) и (12.8) [3] составляем универсальные уравнения метода начальных параметров для вычисления перемещений:

– прогибов

$$EJv = EJv_0 + EJ\theta_0 x + P \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} \Big|_1 + V_A \frac{(x-1,6)^3}{6} + q \frac{(x-1,6)^4}{24} \Big|_2 + \\ + m \frac{(x-3,2)^2}{2} + V_C \frac{(x-3,2)^3}{6} - q \frac{(x-3,2)^4}{24} \Big|_3; \quad (1)$$

– углов поворота сечений

$$EJ\theta = EJ\theta_0 + P \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6} \Big|_1 + V_A \frac{(x-1,6)^2}{2} + q \frac{(x-1,6)^3}{6} \Big|_2 + m(x-3,2) + V_C \frac{(x-3,2)^2}{2} - q \frac{(x-3,2)^3}{6} \Big|_3 \quad (2)$$

Вертикальные линии в формулах (1) и (2) ограничивают количество слагаемых, которые необходимо учитывать при расчете перемещений на соответствующих участках балки.

Начальные параметры EJv_0 и $EJ\theta_0$ определим из условий закрепления балки:

а) в точке A при $x = 1,6$ м $v_A = 0$, следовательно, из уравнения (1) получим

$$EJv_A = EJv_0 + EJ\theta_0 \cdot 1,6 + 20 \cdot \frac{1,6^3}{6} - 5 \cdot \frac{1,6^4}{24} \Big|_1 = 0,$$

после преобразований получим

$$EJv_0 + EJ\theta_0 \cdot 1,6 = -12,3 \text{ кН}\cdot\text{м}^3; \quad (3)$$

б) в точке C при $x = 3,2$ м $v_C = 0$, следовательно,

$$EJv_C = EJv_0 + EJ\theta_0 \cdot 3,2 + 20 \cdot \frac{3,2^3}{6} - 5 \cdot \frac{3,2^4}{24} \Big|_1 - 42 \cdot \frac{(3,2-1,6)^3}{6} + 5 \cdot \frac{(3,2-1,6)^4}{24} \Big|_2 = 0,$$

откуда

$$EJv_0 + EJ\theta_0 \cdot 3,2 = -60,1 \text{ кН}\cdot\text{м}^3. \quad (4)$$

Из решения системы уравнений (3) и (4) определим

$$EJv_0 = 35,5 \text{ кН}\cdot\text{м}^3; \quad EJ\theta_0 = -29,9 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

В сечении B при $x = 0$ и сечении D при $x = 4,8$ м по уравнению (1) вычислим прогибы:

$$EJv_B = EJv_0 = 35,5 \text{ кН}\cdot\text{м}^3,$$

откуда

$$v_B = \frac{35,5}{EJ} = \frac{35,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 1,38 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 13,8 \text{ мм},$$

следовательно, точка B переместится вверх;

$$EJv_D = 35,5 - 29,9 \cdot 4,8 + 20 \cdot \frac{4,8^3}{6} - 5 \cdot \frac{4,8^4}{24} \Big|_1 - 42 \cdot \frac{(4,8-1,6)^3}{6} + 5 \cdot \frac{(4,8-1,6)^4}{24} \Big|_2 + 16 \cdot \frac{(4,8-3,2)^2}{2} + 38 \cdot \frac{(4,8-3,2)^3}{6} - 5 \cdot \frac{(4,8-3,2)^4}{24} \Big|_3 = -12,4 \text{ кН}\cdot\text{м}^3;$$

$$v_D = -\frac{12,4}{EJ} = -\frac{12,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = -4,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -4,8 \text{ мм},$$

следовательно, сечение D переместится вниз.

Используя уравнение (2), определим углы поворота сечения A при $x = 1,6$ м и сечения C при $x = 3,2$ м:

$$EJ\theta_A = -29,9 + 20 \cdot \frac{1,6^2}{2} - 5 \cdot \frac{1,6^3}{6} = -13,3 \text{ кН}\cdot\text{м}^2,$$

$$\theta_A = -\frac{13,3}{EJ} = -\frac{13,3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = -5,2 \cdot 10^{-2} \text{ рад},$$

следовательно, сечение A повернется по ходу часовой стрелки;

$$EJ\theta_C = -29,9 + 20 \cdot \frac{3,2^2}{2} - 5 \cdot \frac{3,2^3}{6} \Big|_1 - 42 \cdot \frac{(3,2-1,6)^2}{2} + 5 \cdot \frac{(3,2-1,6)^3}{6} \Big|_2 = -5,2 \text{ кН}\cdot\text{м}^2,$$

$$\theta_C = -\frac{5,2}{EJ} = -\frac{5,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = -2,0 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

следовательно, сечение C повернется по ходу часовой стрелки.

2. Статически неопределимые балки

Задача 3. Расчет статически неопределимой балки методом сравнения деформаций

В учебнике [1] – § 7.7, в пособии [3] – тема 14.

Условие. Балка постоянной жесткости EJ закреплена с помощью жесткой заделки и шарнирной опоры.

Требуется:

1. Методом сравнения деформаций раскрыть статическую неопределимость системы (определить лишние неизвестные).

2. Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

Алфавит	q , кН/м	P , кН	m , кН·м	a , м
	1	2	3	4
<i>а б в</i>	8	24	6	1,5
<i>г д е ё</i>	7	20	24	1,4
<i>ж з и й</i>	6	16	8	1,2
<i>к л м</i>	5	12	22	1,0
<i>н о п</i>	4	8	10	0,8
<i>р с т</i>	8	10	20	0,6
<i>у ф х</i>	7	12	12	0,6
<i>ц ч ш щ</i>	6	14	18	0,8
<i>ъ ы ь</i>	5	16	14	1,0
<i>э ю я</i>	4	18	16	1,2

Варианты расчетных схем

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По имени и фамилии (например, С. Ивлев) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу. Вариант расчетной схемы выбираем в соответствии с учебным шифром студента (рис. 4).

С.	И	В	Л	е	в
1	2	3	4		
$q, \text{кН/м}$	$P, \text{кН}$	$m, \text{кН}\cdot\text{м}$	$a, \text{м}$		
8	16	6	1,0		

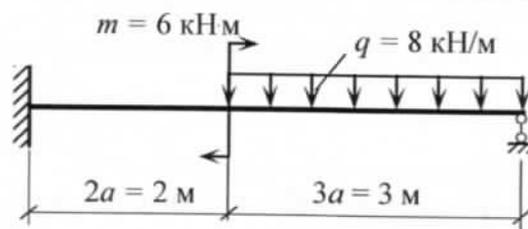


Рис. 4. Расчетная схема статически неопределимой балки

2. Раскрытие статической неопределимости системы

Решение статически неопределимых балок выполняем по следующему алгоритму:

1. *Определить степень статической неопределимости системы.* Определение проводим по формуле

$$n = C - 3, \quad (5)$$

где C – число наложенных связей на балку; 3 – необходимое и достаточное число связей для того, чтобы балка была статически определимой и геометрически неизменяемой.

В нашем случае $n = 4 - 3 = 1$. Следовательно, система один раз статически неопределима.

2. *Выбрать основную систему.* В качестве основной системы выбираем консольную балку (рис. 5, а), которая получается из расчетной системы путем отбрасывания одной лишней связи (вертикальной связи в точке В).

Загрузим основную систему заданной внешней нагрузкой и по направлению отброшенной связи приложим неизвестное усилие X (см. рис. 5, б).

3. *Составить деформационное уравнение.* Деформация основной системы должна повторять деформацию расчетной балки, поэтому вертикальное перемещение точки В должно быть равно нулю.

Вертикальное перемещение точки В определим, используя принцип независимости действия сил, как сумму перемещений отдельно от неизвестной силы X и от заданной нагрузки:

$$v_B = v_{B,X} + v_{B,P} = 0. \quad (6)$$

Перемещение точки В от неизвестной силы $v_{B,X}$ (см. рис. 5, в) определим по стандартной формуле (см. табл. П2.2 в пособии [3])

$$v_{B,X} = \frac{Xl^3}{3EJ} = \frac{X(5a)^3}{3EJ} = \frac{41,7}{EJ} X,$$

где l – длина консоли, $l = 5a$; EJ – изгибная жесткость балки.

Перемещение точки В от заданной нагрузки $v_{B,P}$ определим методом начальных параметров. Выберем начало координат на левом конце балки, загруженной только внешними нагрузками q и m (см. рис. 5, г). Из уравнения статики определим опорные реакции:

$$\sum F_y = -q \cdot 3 + V_C = 0,$$

откуда $V_C = 8 \cdot 3 = 24$ кН;

$$\sum m_c = -m - 3q \cdot 3,5 - M_C = 0,$$

откуда $M_C = -6 - 3 \cdot 8 \cdot 3,5 = -90$ кН·м.

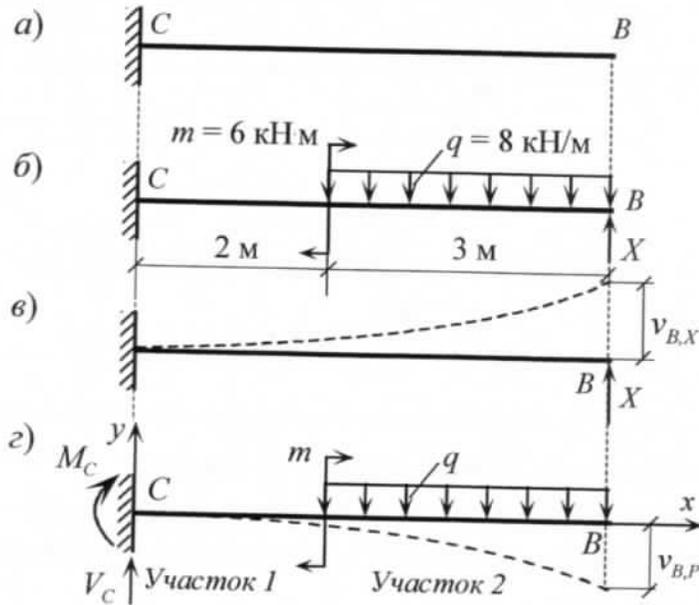


Рис. 5. Основная система, нагруженная различными нагрузками

Составим универсальное уравнение изогнутой оси балки (см. решение задачи 2)

$$EJv = EJv_0 + EJ\theta_0 x + M_C \frac{x^2}{2} + V_C \frac{x^3}{6} \Big|_1 + m \frac{(x-2)^2}{2} - q \frac{(x-2)^4}{24} \Big|_2. \quad (7)$$

Продифференцируем уравнение (7) по аргументу x и получим уравнение для определения углов поворота сечений

$$EJ\theta = EJ\theta_0 + M_C x + V_C \frac{x^2}{2} \Big|_1 + m(x-2) - q \frac{(x-2)^3}{6} \Big|_2. \quad (8)$$

Из условий закрепления определим начальные параметры:

а) при $x = 0$ $\theta_C = 0$, откуда из уравнения (8) $EJ\theta_0 = 0$;

б) при $x = 0$ $v_C = 0$, откуда из уравнения (7) $EJv_0 = 0$.

Перемещение точки B при $x = 5$ м определим из уравнения (7):

$$EJv_{B,P} = -90 \cdot \frac{5^2}{2} + 24 \cdot \frac{5^3}{6} \Big|_1 + 6 \cdot \frac{(5-2)^2}{2} - 8 \cdot \frac{(5-2)^4}{24} \Big|_2 = -625,$$

$$v_{B,P} = -\frac{625}{EJ}.$$

Подставим полученные перемещения точки B в деформационное уравнение (6) и определим неизвестное усилие X :

$$v_B = \frac{41,7}{EJ} X - \frac{625}{EJ} = 0,$$

откуда

$$X = \frac{625}{41,7} = 15 \text{ кН.}$$

3. Построение эпор поперечных сил Q и изгибающих моментов M

Эпоры Q и M строим в основной системе, приложив все заданные нагрузки и усилие X (рис. 6, а).

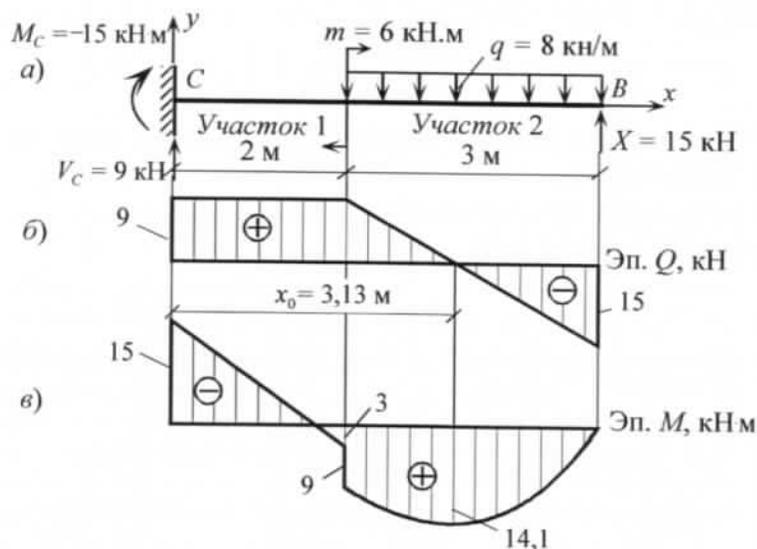


Рис. 6. Эпоры поперечных сил и изгибающих моментов

Опорные реакции V_C и M_C определим из уравнений равновесия:

$$\sum F_y = V_C - q \cdot 3 + X = 0,$$

откуда получим $V_C = 8 \cdot 3 - 15 = 9$ кН;

$$\sum m_C = M_C - m - q \cdot 3 \cdot 3,5 + X \cdot 5 = 0,$$

откуда имеем $M_C = 6 + 8 \cdot 3 \cdot 3,5 - 15 \cdot 5 = -15$ кН·м.

Балку разбиваем на два участка (1 и 2 на рис. 6, а) и определяем значения Q и M в характерных сечениях.

Участок 1

$$0 \leq x \leq 2 \text{ м}; Q_1 = V_C = 9 \text{ кН}, M_1 = M_C + V_C x.$$

$$\text{При } x = 0 \quad M_1 = -15 \text{ кН·м}; \text{ при } x = 2 \text{ м} \quad M_1 = 3 \text{ кН·м}.$$

Участок 2

$$2 \text{ м} \leq x \leq 5 \text{ м}; Q_2 = V_C - q(x-2), M_2 = M_C + m + V_C x - q \frac{(x-2)^2}{2}.$$

$$\text{При } x = 2 \text{ м} \quad Q_2 = 9 \text{ кН}, M_2 = 9 \text{ кН·м}; \text{ при } x = 5 \text{ м} \quad Q_2 = -15 \text{ кН}, M_2 = 0.$$

На втором участке определим экстремальное значение изгибающего момента в сечении, где $Q_2 = 0$:

$$Q_2 = V_C - q(x-2) = 0,$$

откуда

$$x_0 = \frac{V_C}{q} + 2 = \frac{9}{8} + 2 = 3,13 \text{ м}.$$

В данном сечении при $x = x_0 = 3,13$ м определим экстремальное значение M_3 :

$$M_3 = -15 + 6 + 9 \cdot 3,13 - 8 \cdot \frac{(3,13-2)^2}{2} = 14,1 \text{ кН·м}.$$

Задача 4. Расчет статически неопределимой балки методом сил

В учебнике [1] – § 7.7, в пособии [3] – тема 14.

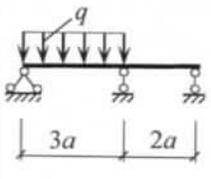
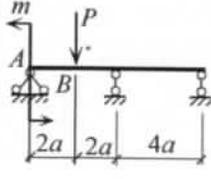
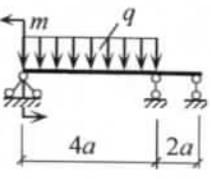
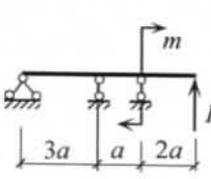
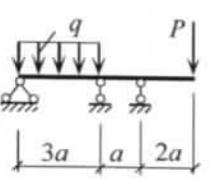
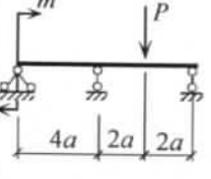
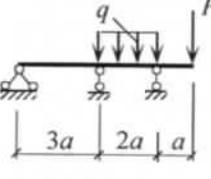
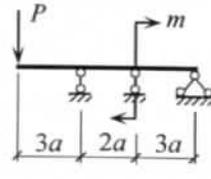
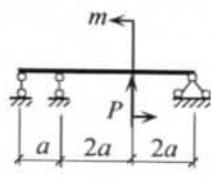
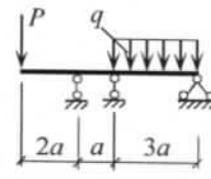
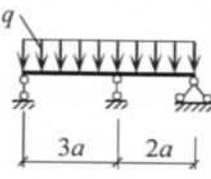
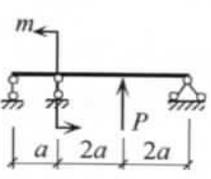
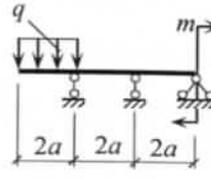
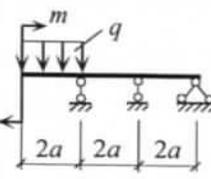
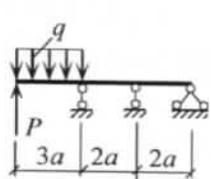
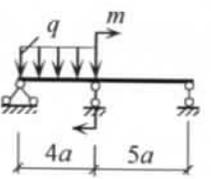
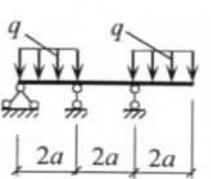
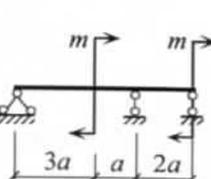
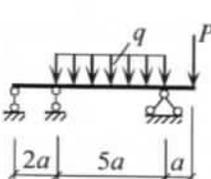
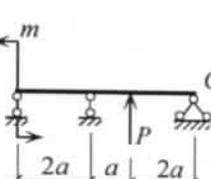
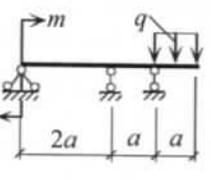
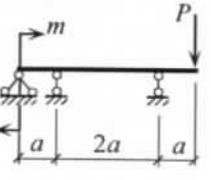
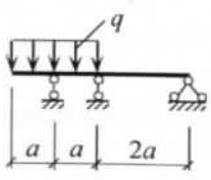
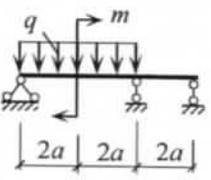
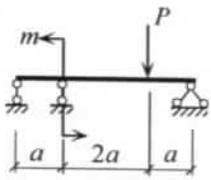
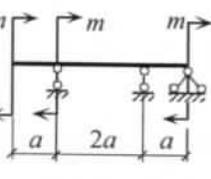
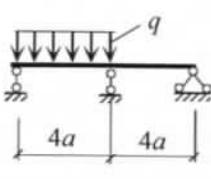
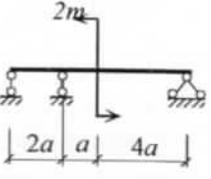
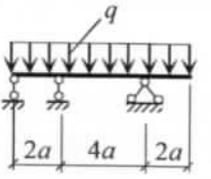
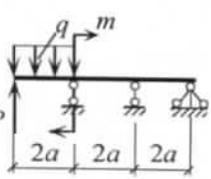
Условие. Балка постоянной жесткости EJ закреплена с помощью трех шарнирных опор.

Требуется:

1. Методом сил раскрыть статическую неопределимость системы, т.е. определить значения лишних неизвестных.
2. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
3. Сделать деформационную проверку решения.

Алфавит	a , м	q , кН/м	P , кН	m , кН·м
	1	2	3	4
<i>а б в</i>	1,5	5	24	6
<i>г д е ё</i>	1,4	8	20	24
<i>ж з и й</i>	1,2	10	16	8
<i>к л м</i>	1,0	12	12	22
<i>н о п</i>	0,8	10	8	10
<i>р с т</i>	0,6	8	10	20
<i>у ф х</i>	0,7	5	12	12
<i>ц ч ш щ</i>	0,8	6	14	18
<i>ъ ы ь</i>	1,0	8	16	14
<i>э ю я</i>	1,2	10	18	16

Варианты расчетных схем

1 	2 	3 	4 	5 
6 	7 	8 	9 	10 
11 	12 	13 	14 	15 
16 	17 	18 	19 	20 
21 	22 	23 	24 	25 
26 	27 	28 	29 	30 

Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По имени и фамилии (например, С. Ивлев) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу. Вариант расчетной схемы выбираем в соответствии с учебным шифром студента (рис. 7, а).

С.	И	В	Л	Е	В
1	2	3	4		
<i>a</i> , м	<i>q</i> , кН/м	<i>P</i> , кН	<i>m</i> , кН·м		
0,6	10	–	22		

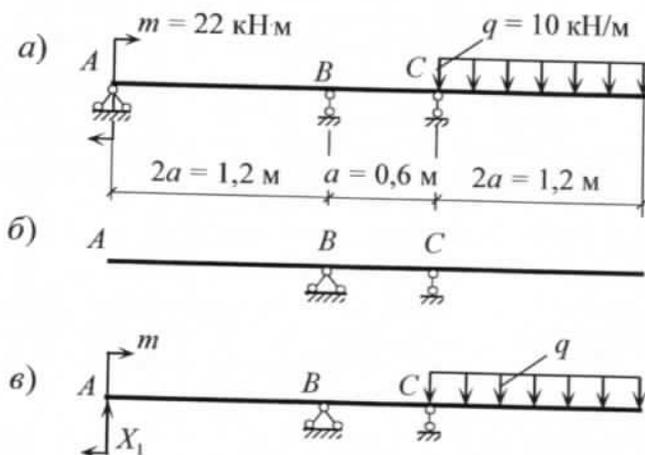


Рис. 7. Расчетная схема (а), основная система (б), эквивалентная система (в) балки

2. Раскрытие статической неопределимости системы

Цель раскрытия статической неопределимости системы – это *определение значений лишних неизвестных*. Для этого необходимо последовательно выполнить несколько этапов расчета:

1. *Определить степень статической неопределимости системы*. Расчет выполним по формуле (5):

$$n = C - 3 = 4 - 3 = 1,$$

следовательно, имеется одна лишняя связь.

2. *Выбрать основную систему*. В качестве основной системы выбираем балку на двух шарнирных опорах, которая получается из расчетной балки путем отбрасывания вертикальной связи в шарнирно-неподвижной опоре А. При этом горизонтальную связь, наложенную в точке А, формально перенесем в точку В (см. рис. 7, б).

Изобразим эквивалентную систему (см. рис. 7, в), загрузив основную систему внешней нагрузкой и неизвестным усилием X_1 по направлению отброшенной связи.

3. *Составить деформационное уравнение*. Для один раз статически неопределимой балки записывается одно деформационное уравнение в каноническом виде:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0, \tag{9}$$

где δ_{11} – перемещение по направлению отброшенной связи от усилия $X_1 = 1$; Δ_{1p} – перемещение по направлению отброшенной связи от заданной нагрузки.

4. *Определить коэффициенты деформационного уравнения*. Для определения коэффициентов δ_{11} и Δ_{1p} построим в основной системе две эпюры изгибающих моментов: эпюру грузовых моментов M_p – только от заданной нагрузки (рис. 8, а), и эпюру единичных моментов \bar{M}_1 – только от усилия $X_1 = 1$ (см. рис. 8, б).

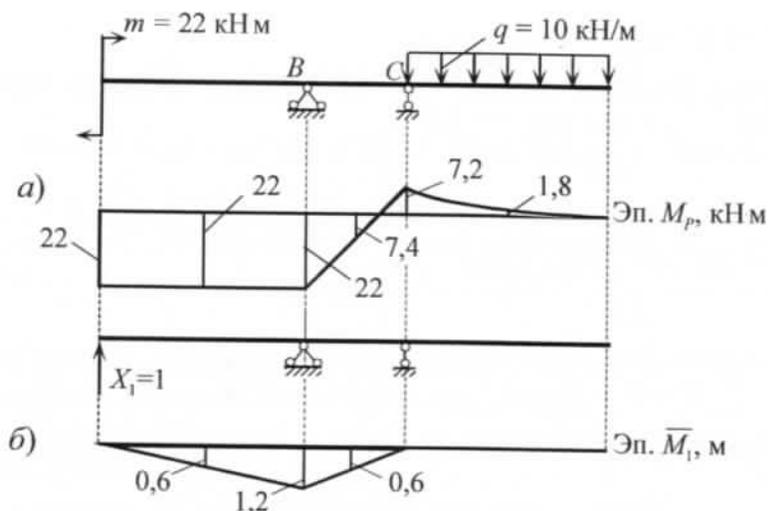


Рис. 8. Эпюры грузовых (а) и единичных моментов (б)

Вертикальное перемещение точки A от $X_1 = 1$ определим как результат перемножения единичной эпюры \bar{M}_1 самой на себя по формуле Симпсона (13.3) [3]:

$$\delta_{11} = [\bar{M}_1 \times \bar{M}_1] = \frac{1,2}{6EJ} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + 1,2 \cdot 1,2) + \frac{0,6}{6EJ} (1,2 \cdot 1,2 + 4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0) = \frac{0,864}{EJ}.$$

Перемещение точки A от заданной нагрузки определим перемножением грузовой эпюры M_p и единичной эпюры \bar{M}_1 :

$$\Delta_{1p} = [M_p \times \bar{M}_1] = \frac{1,2}{6EJ} (0 \cdot 22 + 4 \cdot 22 \cdot 0,6 + 22 \cdot 1,2) + \frac{0,6}{6EJ} (22 \cdot 1,2 + 4 \cdot 7,4 \cdot 0,6 - 7,2 \cdot 0) = \frac{20,3}{EJ}.$$

Значения коэффициентов δ_{11} и Δ_{1p} подставим в уравнение (9):

$$\frac{0,864}{EJ} X_1 + \frac{20,3}{EJ} = 0.$$

Из решения этого уравнения получим

$$X_1 = -\frac{20,3}{0,864} = -23,5 \text{ кН}.$$

Здесь знак «минус» означает, что усилие X_1 действует в противоположном направлении.

3. Построение эпюр поперечных сил Q и изгибающих моментов M

К основной системе приложим все заданные нагрузки и усилие $X_1 = 23,5$ кН, изменив его направление (рис. 9, а).

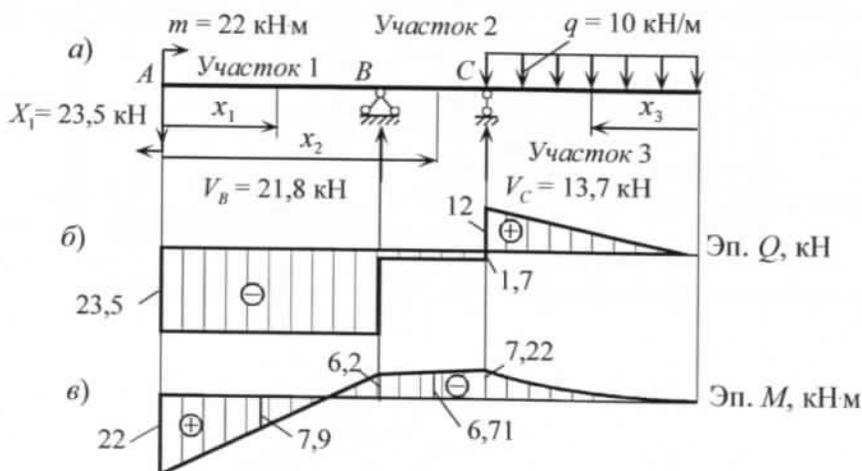


Рис. 9. Балка с нагрузками (а), эпюры поперечных сил (б) и изгибающих моментов (в)

Определим опорные реакции V_B и V_C :

$$\sum m_B = V_C \cdot 0,6 + X_1 \cdot 1,2 - m - (q \cdot 1,2)1,2 = 0,$$

$$\text{откуда } V_C = \frac{-23,5 \cdot 1,2 + 22 + (10 \cdot 1,2)1,2}{0,6} = 13,7 \text{ кН};$$

$$\sum m_C = -V_B \cdot 0,6 + X_1 \cdot 1,8 - m - (q \cdot 1,2)0,6 = 0,$$

$$\text{откуда } V_B = \frac{23,5 \cdot 1,8 - 22 - (10 \cdot 1,2)0,6}{0,6} = 21,8 \text{ кН}.$$

Проверим правильность вычисления реакций, составив еще одно уравнение равновесия

$$\sum F_y = V_C + V_B - X_1 - q \cdot 1,2 = 13,7 + 21,8 - 23,5 - 10 \cdot 1,2 = 0.$$

Балку разбиваем на три участка (см. рис. 9, а) и в характерных сечениях определяем значения Q и M .

Участок 1

$$0 \leq x_1 \leq 1,2 \text{ м}; Q_1 = -X_1 = -23,5 \text{ кН}, M_1 = m - X_1 x_1.$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad M_1 = 22 \text{ кН}\cdot\text{м}; \text{ при } x_1 = 0,6 \text{ м} \quad M_1 = 7,9 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } x_1 = 1,2 \text{ м} \quad M_1 = -6,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 2

$$1,2 \text{ м} \leq x_2 \leq 1,8 \text{ м}; Q_2 = X_1 + V_B = -23,5 + 21,8 = 1,7 \text{ кН}, M_2 = m - X_1 x_2 + V_B(x_2 - 1,2).$$

$$\text{При } x_2 = 1,2 \text{ м} \quad M_2 = -6,2 \text{ кН}\cdot\text{м}; \text{ при } x_2 = 1,5 \text{ м} \quad M_2 = -6,71 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } x_2 = 1,8 \text{ м} \quad M_2 = -7,22 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 3

$$0 \leq x_3 \leq 1,2 \text{ м}; Q_3 = qx_3, M_3 = -q \frac{x_3^2}{2}.$$

$$\text{При } x_3 = 0 \quad Q_3 = 0, M_3 = 0; \text{ при } x_3 = 1,2 \text{ м} \quad Q_3 = 12 \text{ кН}, M_3 = -7,22 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Среднее значение при } x_3 = 0,6 \quad M_3 = -10 \frac{0,6^2}{2} = -1,8.$$

По значениям Q и M строим эпюры (см. рис. 9, б, в).

4. Деформационная проверка решения

На расчетной схеме балки (см. рис. 7, а) в точке А была установлена опора, поэтому ее вертикальное перемещение в основной системе должно быть равно нулю. Перемещение точки А определим, перемножив окончательную эпюру моментов M (см. рис. 9, в) и единичную эпюру моментов \bar{M}_1 (см. рис. 8, б):

$$v_A = [M \times \bar{M}_1] = \frac{1,2}{6EJ} (0 \cdot 22 + 4 \cdot 7,9 \cdot 0,6 - 6,2 \cdot 1,2) + \\ + \frac{0,6}{6EJ} (-6,2 \cdot 1,2 - 4 \cdot 6,71 \cdot 0,6 - 7,22 \cdot 0) = \frac{13,8}{6EJ} - \frac{14,1}{6EJ} \approx 0.$$

Проверка выполняется с погрешностью $\frac{|13,8 - 14,1|}{13,8} 100\% = 2,2\%$.

3. Сложное сопротивление стержня. Косой изгиб балки

Задача 5. Расчет балки-консоли на косой изгиб

В учебнике [1] – § 10.1, в пособии [3] – тема 15.

Условие. Стальная консольная балка нагружена внешними нагрузками, лежащими в разных плоскостях.

Требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов M_z и M_y от нагрузок, действующих в вертикальной и горизонтальной главных плоскостях балки.

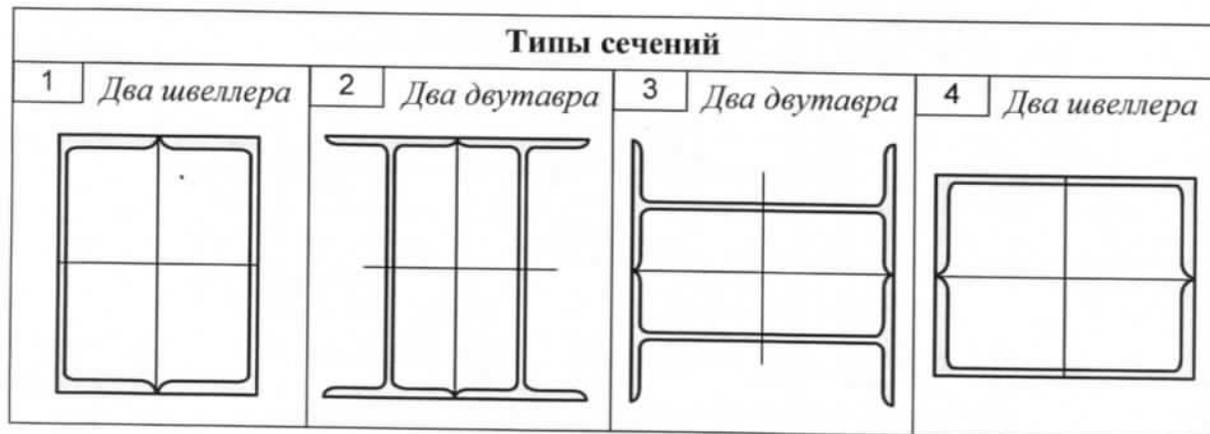
2. Изобразить в масштабе сечение балки и определить моменты инерции сечения относительно главных центральных осей.

3. Определить положение нулевой линии в опасном сечении.

4. Определить нормальные напряжения в опасных точках и построить эпюру нормальных напряжений.

Алфавит	φ, град	P_1 , кН	P_2 , кН	q , кН/м	m , кН·м	a , м	b , м	Тип сечения	Номер двутавра	Номер швеллера
	1	2	3	4	5	6	7			
<i>a б в</i>	20	8*	10	2	2	0,4	0,9	1	22	22
<i>г д е ё</i>	25	8,5	12*	2,5	3*	0,5	0,8	2	22а	24
<i>ж з и й</i>	30	9*	14	3	4	0,6	0,7	3	24	27
<i>к л м</i>	35	9,5	16*	3,5	5*	0,7	0,6	4	24а	30
<i>н о п</i>	40	10*	18	4	6	0,8	0,5	1	27	33
<i>р с т</i>	45	8	10*	2	2*	0,4	0,8	2	22	22
<i>у ф х</i>	50	8,5*	12	2,5	3	0,5	0,7	3	22а	24
<i>ц ч ш щ</i>	55	9	14*	3	4*	0,6	0,6	4	24	27
<i>ъ ы ь</i>	60	9,5*	16	3,5	5	0,7	0,5	1	24а	30
<i>э ю я</i>	65	10	18*	4	6*	0,8	0,4	2	27	33

Примечания: 1. Знак (*) означает, что нужно изменить направление нагрузки на противоположное.
2. Все силы перпендикулярны продольной оси балки.



Варианты расчетных схем

1, 30	2, 29	3, 28
4, 27	5, 26	6, 25
7, 24	8, 23	9, 22
10, 21	11, 20	12, 19
13, 18	14, 17	15, 16

Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По имени и фамилии (например, И. Яковлев) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу. Вариант расчетной схемы выбираем в соответствии с индивидуальным шифром студента.

И.	Я	к	о	в	л	е	в	И.	Я
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
φ , град	P_1 , кН	P_2 , кН	q , кН/м	m , кН·м	a , м	b , м	Тип сечения	Номер двутавра	Номер швеллера
30	10	—	4	—	0,7	0,8	1	—	33

В столбцах данных, которые не используются в расчетной схеме, необходимо поставить прочерк.

Изобразим расчетную схему балки, соблюдая масштаб длин (рис. 10, а), учитывая, что распределенная нагрузка q действует в вертикальной плоскости параллельно оси y , а сила P_1 — под углом φ к оси y .

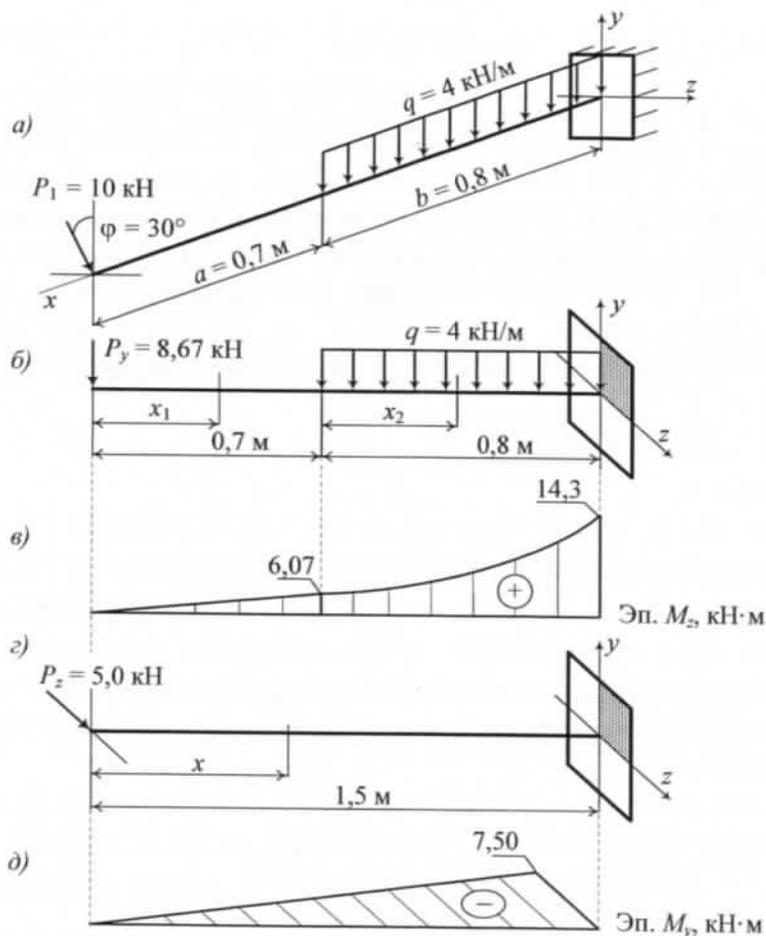


Рис. 10. Расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов

2. Определение изгибающих моментов и построение эпюр M_z и M_y

Для определения эпюр изгибающих моментов рассмотрим нагружение балки в двух главных плоскостях.

Разложим силу P_1 на составляющие по главным осям z и y :

$$P_y = P_1 \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,867 = 8,67 \text{ кН},$$

$$P_z = P_1 \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5,0 \text{ кН}.$$

Изобразим расчетную схему балки, соответствующую плоскому вертикальному изгибу (см. рис. 10, б), приложив нагрузки, действующие только в вертикальной плоскости (силу P_y и распределенную нагрузку q).

Определим изгибающие моменты относительно оси z , разделив балку на два участка (см. рис. 10, б). При составлении уравнений изгибающих моментов необходимо учитывать, что знак изгибающего момента при косом изгибе определяется по первой четверти сечения: если изгибающий момент вызывает деформации растяжения в первой четверти сечения, то он считается положительным, если сжатия – отрицательным. На рис. 10, б первая четверть поперечного сечения заштрихована.

Участок 1

$$0 \leq x_1 \leq 0,7 \text{ м}; M_z = P_y x_1.$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad M_z = 0; \text{ при } x_1 = 0,7 \text{ м} \quad M_z = P_y a = 8,67 \cdot 0,7 = 6,07 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 2

$$0 \leq x_2 \leq 0,8 \text{ м}; M_z = P_y(a + x_2) + \frac{q x_2^2}{2}.$$

$$\text{При } x_2 = 0 \quad M_z = P_y a = 8,67 \cdot 0,7 = 6,07 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } x_2 = 0,8 \text{ м} \quad M_z = P_y(a + b) + \frac{q b^2}{2} = 8,67(0,7 + 0,8) + \frac{4 \cdot 0,8^2}{2} = 14,3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Построим эпюру M_z (см. рис. 10, в), откладывая ординаты со стороны растянутых волокон, т.е. положительные значения – вверх, а отрицательные – вниз.

Изобразим расчетную схему балки, соответствующую плоскому горизонтальному изгибу (см. рис. 10, з), приложив нагрузки, действующие только в горизонтальной плоскости – силу P_z .

Определим изгибающий момент относительно оси y . На расчетной схеме один участок (см. рис. 10, з)

$$0 \leq x \leq 1,5 \text{ м}; M_y = -P_z x.$$

$$\text{При } x = 0 \quad M_y = 0;$$

$$\text{при } x = a + b = 1,5 \text{ м} \quad M_y = -P_z(a + b) = -5,0 \cdot 1,5 = -7,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Построим эпюру M_y (см. рис. 10, д), откладывая ординаты со стороны растянутых волокон, т.е. положительные значения – по направлению оси z , а отрицательные – против нее.

3. Определение геометрических характеристик сечения

Изобразим заданное поперечное сечение балки, соблюдая масштаб, и покажем основные размеры (рис. 11).

Из табл. А3 для заданного прокатного профиля – швеллера № 33 выберем данные, необходимые для расчета: высота $h = 33$ см; ширина полки $b = 10,5$ см; координата центра тяжести $z_0 = 2,9$ см; площадь $A = 46,5$ см²; моменты инерции $J_z = 8\,010$ см⁴, $J_y = 491$ см⁴.

Определим главные центральные моменты инерции всего сечения. Главными центральными осями для данного сечения являются оси симметрии y и z .

Момент инерции относительно оси z равен:

$$J_z = 2J_z = 2 \cdot 8\,010 = 16\,020 \text{ см}^4.$$

Момент инерции относительно оси y определим по формуле (9.7) [2]:

$$J_y = 2(J_{y_1} + c^2 A),$$

где c – расстояние между осями y и y_1 .

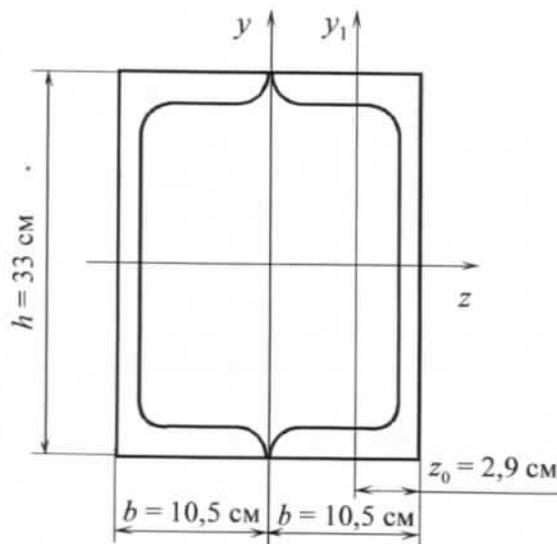


Рис. 11. Поперечное сечение балки

В нашем случае $c = b - z_0 = 10,5 - 2,9 = 7,6$ см.

Получим $J_y = 2(491 + 7,6^2 \cdot 46,5) = 6\,350$ см⁴.

4. Определение положения нулевой линии и построение эпюры нормальных напряжений

Определим положение нулевой линии в опасном сечении вблизи жесткой заделки, где оба изгибающих момента достигают опасных (максимальных по абсолютной величине) значений: $M_y = -7,5$ кН·м, $M_z = 14,3$ кН·м.

При косом изгибе нулевая линия проходит через центр тяжести сечения и направлена под углом α_0 к оси z . Угол α_0 определим по формуле (15.6) [3]:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{J_z M_y}{J_y M_z} = -\frac{16\,020 \cdot 10^{-8} \cdot (-7,50 \cdot 10^3)}{6\,350 \cdot 10^{-8} \cdot 14,3 \cdot 10^3} = 1,32.$$

Получим $\alpha_0 = \arctg 1,32 = 52,9^\circ$.

Положительное значение угла показывает, что α_0 необходимо откладывать от оси z против хода часовой стрелки (рис. 12).

Определим напряжения в опасных точках, наиболее удаленных от нулевой линии, т.е. в точках B и C . Нормальные напряжения рассчитаем по формуле (15.3) [3]:

$$\sigma_B = \frac{M_z}{J_z} y_B + \frac{M_y}{J_y} z_B = \frac{14,3 \cdot 10^3}{16\,020 \cdot 10^{-8}} 0,165 + \frac{-7,50 \cdot 10^3}{6\,354 \cdot 10^{-8}} (-0,105) = 27,1 \text{ МПа};$$

$$\sigma_C = \frac{M_z}{J_z} y_C + \frac{M_y}{J_y} z_C = \frac{14,3 \cdot 10^3}{16\,020 \cdot 10^{-8}} (-0,165) + \frac{-7,50 \cdot 10^3}{6\,354 \cdot 10^{-8}} 0,105 = -27,1 \text{ МПа}.$$

Эпюру нормальных напряжений построим, учитывая линейное распределение напряжений, откладывая ординаты σ_B и σ_C от базы эпюры, проведенной перпендикулярно нулевой линии (см. рис. 12).

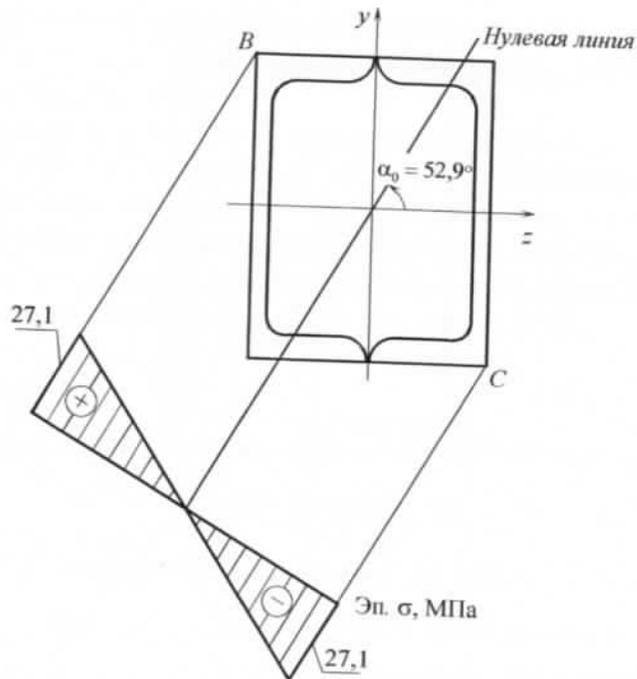


Рис. 12. Положение нулевой линии и эпюра нормальных напряжений

Задача 6. Косой изгиб балки на двух опорах

В учебнике [1] – § 10.1, в пособии [3] – тема 15.

Условие. На стальную балку действует система нагрузок, ориентированных следующим образом:

- распределенная нагрузка q действует в вертикальной плоскости;
- сосредоточенные сила P и момент m приложены в плоскости, наклоненной под углом φ к вертикальной оси.

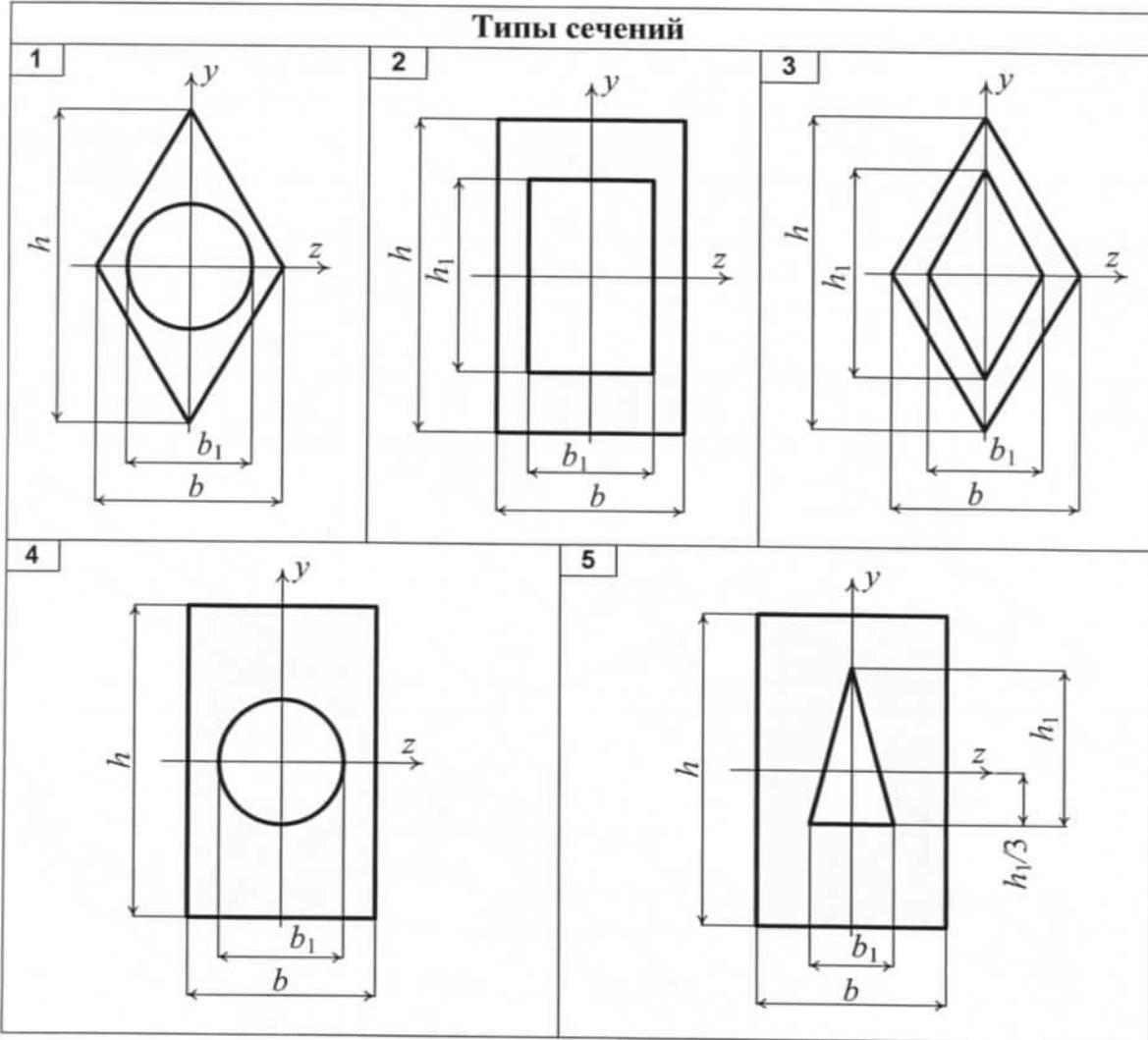
Требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов M_z и M_y от нагрузок, действующих в вертикальной и горизонтальной главных плоскостях балки.
2. Изобразить в масштабе сечение балки и определить моменты инерции сечения относительно главных центральных осей.
3. Определить положение нулевой линии в опасном сечении и построить эпюру нормальных напряжений.
4. Из условия прочности подобрать сечение из прокатного двутавра, приняв расчетное сопротивление стали $R_y = 210$ МПа.

Алфавит	Ф, град	P, кН	m, кН·м	q, кН/м	l ₁ , м	l ₂ , м	h, см	h ₁ , см	b, см	b ₁ , см	Тип сечения
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
а б в	20	4	8	10	1,0	1,0	30	20	18	12	11
г д е ё	30	6	10	8	1,2	1,2	32	18	20	10	1
ж з и й	40	8	12	6	1,4	1,4	35	16	22	8	2
к л м	45	10	14	5	1,6	1,6	36	14	24	12	3
н о п	20	4	16	10	1,0	1,0	38	12	26	10	4
р с т	30	6	18	8	1,2	1,2	40	20	18	8	5
у ф х	40	8	20	6	1,4	1,4	35	18	20	12	1
ц ч ш щ	45	10	18	5	1,5	1,5	36	16	22	10	2
ъ ы ь	20	4	16	10	1,4	1,4	38	14	24	8	3
э ю я	30	6	14	8	1,2	1,2	40	12	26	12	4

Примечание. Все силы перпендикулярны продольной оси балки.

Типы сечений

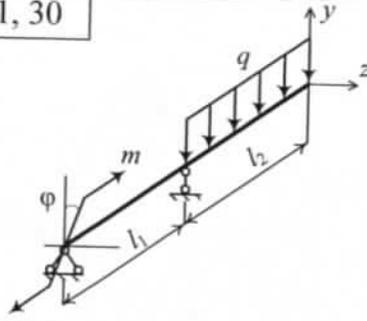


сле-
й под
дих в
ения
пору
рас-

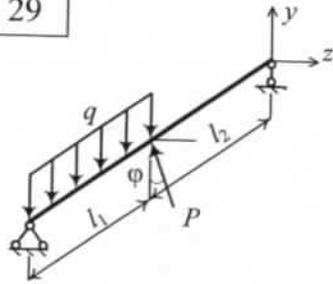
Тип сечения
1
2
3
4
5
1
2
3
4
5

Варианты расчетных схем

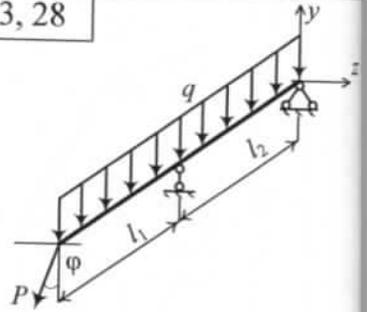
1, 30



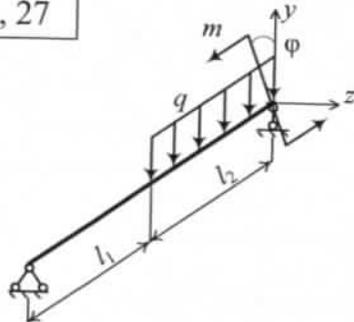
2, 29



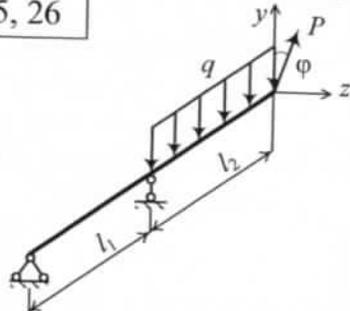
3, 28



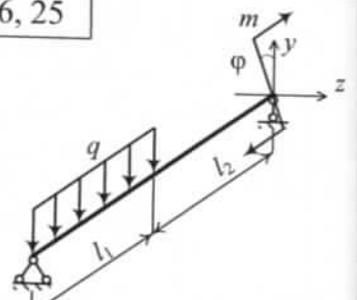
4, 27



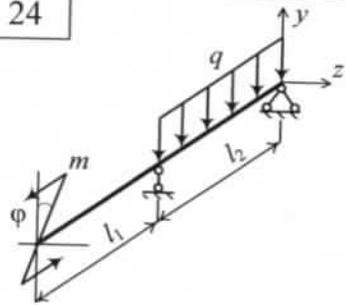
5, 26



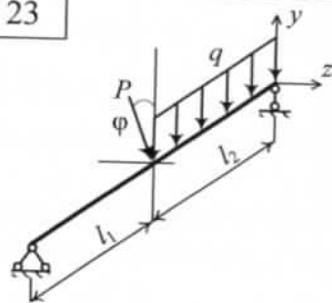
6, 25



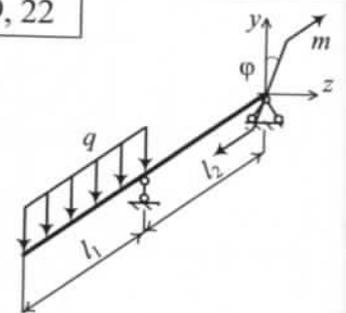
7, 24



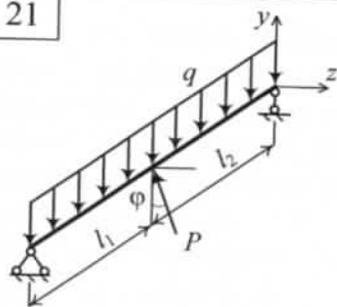
8, 23



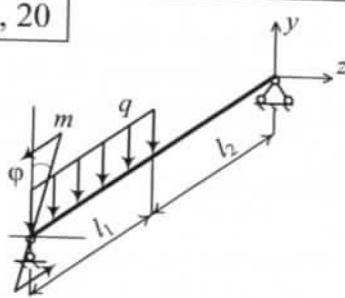
9, 22



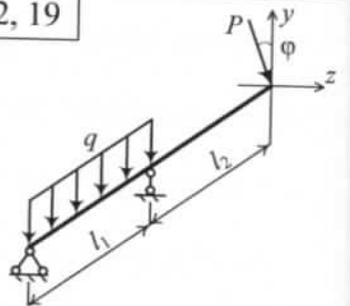
10, 21



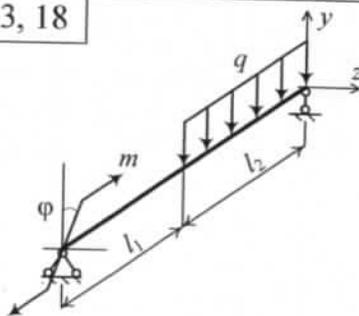
11, 20



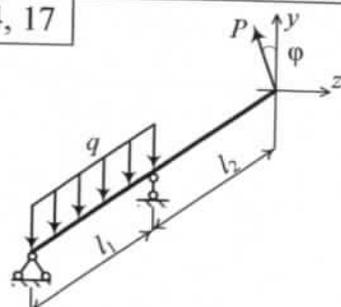
12, 19



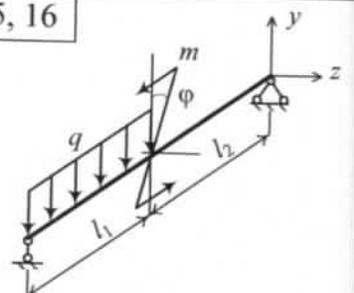
13, 18



14, 17



15, 16



Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По имени и фамилии (например, Р. Николаев) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу.

Р.	Н	и	к	о	л	а	е	в	Р.	Н
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
φ, град	P , кН	m , кН·м	q , кН/м	l_1 , м	l_2 , м	h , см	h_1 , см	b , см	b_1 , см	Тип сечения
30	—	12	5	1,0	1,6	30	18	18	8	5

В столбцах данных, которые не используются в расчетной схеме необходимо поставить прочерк.

Изобразим расчетную схему балки, соблюдая масштаб длин (рис. 13, а).

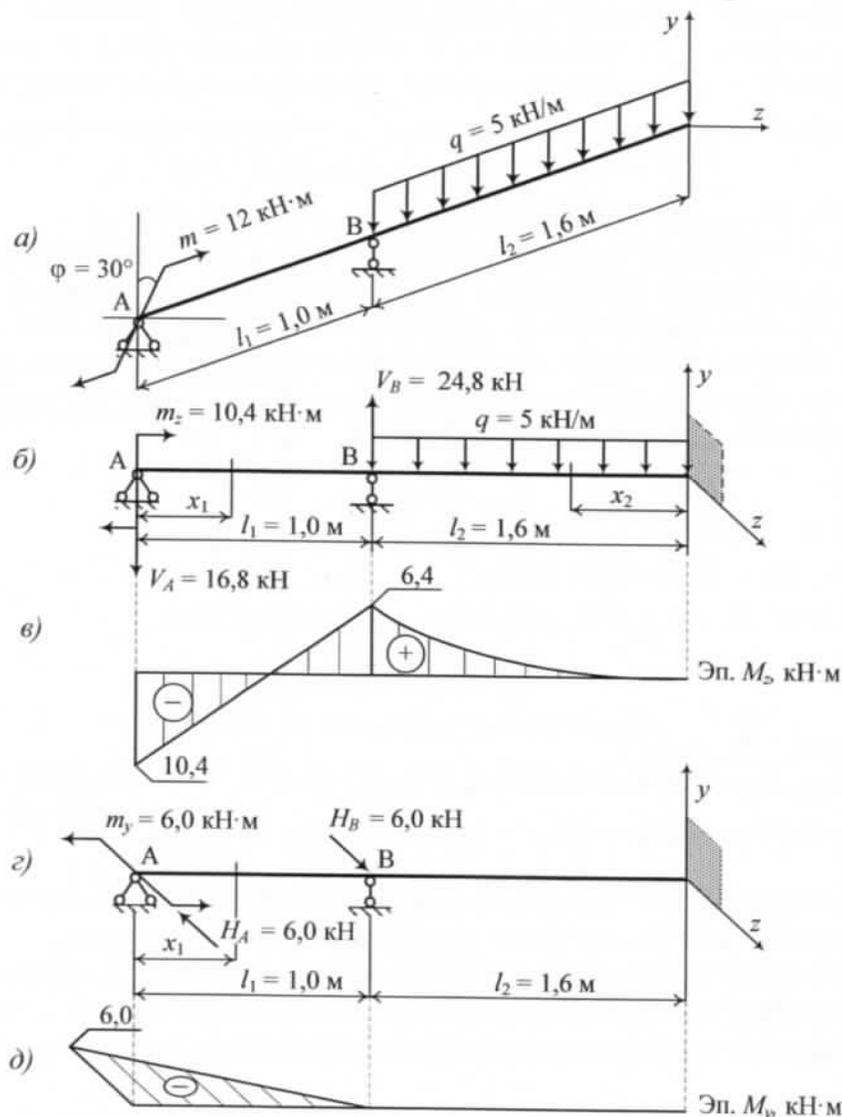


Рис. 13. Расчетная схема и эпюры изгибающих моментов

2. Определение изгибающих моментов и построение эпюр M_z и M_y

Для построения эпюр изгибающих моментов рассмотрим нагружение балки в двух главных плоскостях (см. рис. 13, б, г).

Разложим сосредоточенный момент m на составляющие относительно главных осей:

$$m_z = m \cdot \cos 30^\circ = 12 \cdot 0,866 = 10,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$m_y = m \cdot \sin 30^\circ = 12 \cdot 0,5 = 6,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Рассмотрим изгиб балки в вертикальной плоскости. Изобразим ее расчетную схему, соответствующую плоскому вертикальному изгибу (см. рис. 13, б), приложив нагрузки, действующие только в вертикальной плоскости – момент m_z и распределенную нагрузку q .

Из уравнений равновесия балки определим реакции опор V_A и V_B :

$$\sum m_A = -m_z - ql_2 \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) + V_B l_1 = 0,$$

откуда $V_B = 10,4 + 5 \cdot 1,6(1 + 0,8) = 24,8 \text{ кН};$

$$\sum m_B = -m_z - ql_2 \frac{l_2}{2} + V_A l_1 = 0,$$

откуда $V_A = 10,4 + 5 \cdot 1,6 \cdot 0,8 = 16,8 \text{ кН}.$

Для проверки расчета составим еще одно уравнение равновесия балки:

$$\sum F_y = -V_A + V_B - ql_2 = -16,8 + 24,8 - 5 \cdot 1,6 = 0.$$

Уравнение выполняется, опорные реакции определены правильно.

Определим изгибающие моменты относительно оси z , разделив балку на два участка. При записи уравнений изгибающих моментов необходимо учитывать, что знак изгибающего момента определяется по правилу первой четверти сечения: *если изгибающий момент в первой четверти сечения вызывает деформации растяжения, то он считается положительным, а если сжатия – отрицательным*. На рис. 13, б первая четверть поперечного сечения заштрихована.

Участок 1

$$0 \leq x_1 \leq 1,0 \text{ м}; \quad M_z = -m_z + V_A x_1.$$

При $x_1 = 0$ $M_z = -m_z = -10,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$

при $x_1 = 1,0 \text{ м}$ $M_z = -m_z + V_A l_1 = -10,4 + 16,8 \cdot 1,0 = 6,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Участок 2

$$0 \leq x_2 \leq 1,6 \text{ м}; \quad M_z = q \frac{x_2^2}{2}.$$

При $x_2 = 0$ $M_z = 0$; при $x_2 = 1,6 \text{ м}$ $M_z = q \frac{l_2^2}{2} = 5,0 \cdot \frac{1,6^2}{2} = 6,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Построим эпюру M_z (см. рис. 13, в), откладывая ординаты со стороны растянутых волокон, т.е. положительные значения – вверх, а отрицательные – вниз.

Рассмотрим изгиб в горизонтальной плоскости. Для этого изобразим расчетную схему балки, соответствующую плоскому горизонтальному изгибу (см. рис. 13, г), приложив нагрузки, действующие только в горизонтальной плоскости – сосредоточенный момент m_y .

Составим уравнения равновесия для определения реакций опор H_A и H_B , действующих в горизонтальной плоскости:

$$\sum m_A = m_y - H_B l_1 = 0, \text{ откуда } H_B = 6,0 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = m_y - H_A l_1 = 0, \text{ откуда } H_A = 6,0 \text{ кН}.$$

Для проверки расчета составим еще одно уравнение равновесия балки

$$\sum F_z = -H_A + H_B = -6,0 + 6,0 = 0.$$

Уравнение выполняется, следовательно, опорные реакции определены правильно. Определим изгибающий момент относительно оси y .

Участок I

$$0 \leq x_1 \leq 1,0 \text{ м}; \quad M_y = -m_y + H_A x_1.$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad M_y = -m_y = -6,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } x_1 = 1,0 \text{ м} \quad M_y = -m_y + H_A l_1 = -6,0 + 6,0 \cdot 1 = 0.$$

Построим эпюру M_y (см. рис. 13, δ), откладывая ординаты со стороны растянутых волокон.

3. Определение геометрических характеристик сечения

Изобразим заданное поперечное сечение балки, соблюдая масштаб, покажем основные размеры (рис. 14). Сечение состоит из прямоугольника и вырезанного равнобедренного треугольника, центры тяжести которых совпадают. Таким образом, главными центральными осями сечения являются ось симметрии y и перпендикулярная ей ось z , которая проходит через общий центр тяжести сечения.

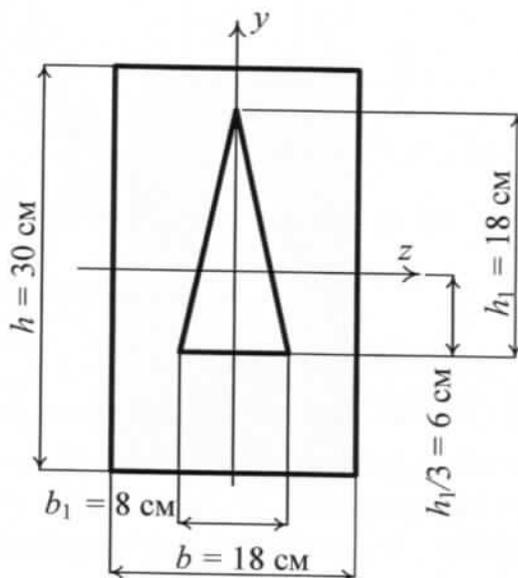


Рис. 14. Поперечное сечение балки

Моменты инерции относительно главных центральных осей определим по формулам (9.13)–(9.15) [2]:

$$J_z = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{36} = \frac{18 \cdot 30^3}{12} - \frac{8 \cdot 18^3}{36} = 39\,200 \text{ см}^4,$$

$$J_y = \frac{hb^3}{12} - \frac{h_1 b_1^3}{48} = \frac{30 \cdot 18^3}{12} - \frac{18 \cdot 8^3}{48} = 14\,400 \text{ см}^4.$$

4. Определение положения нулевой линии и построение эпюры нормальных напряжений

Определим положение нулевой линии в опасном сечении, где оба изгибающих момента достигают опасных значений, максимальных по абсолютной величине. Это сечение над опорой A , где $M_y = -6,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_z = -10,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

При косом изгибе нулевая линия проходит через центр тяжести сечения и направлена под углом α_0 к оси z . Угол α_0 определим по формуле (15.6) [3]:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{J_z M_y}{J_y M_z} = -\frac{39200 \cdot 10^{-8} \cdot (-6,0 \cdot 10^3)}{14400 \cdot 10^{-8} \cdot (-10,4 \cdot 10^3)} = -1,57,$$

получим $\alpha_0 = \operatorname{arctg}(-1,57) = -57,5^\circ$.

Положительное значение угла α_0 откладывается от оси z против хода часовой стрелки, а отрицательное – по ее ходу (рис. 15).

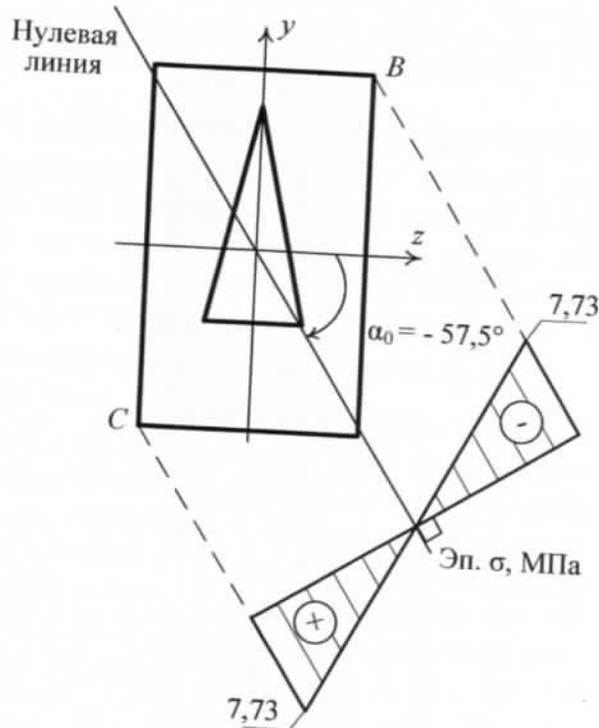


Рис. 15. Положение нулевой линии и эпюра напряжений

Нормальные напряжения достигают максимальных значений в точках сечения, наиболее удаленных от нулевой линии, т.е. в точках B ($z_B = 9$ см, $y_B = 15$ см) и C ($z_C = -9$ см, $y_C = -15$ см). Напряжения в этих точках вычислим по формуле (15.3) [3]:

$$\sigma_B = \frac{M_z}{J_z} y_B + \frac{M_y}{J_y} z_B = \frac{-10,4 \cdot 10^3}{39200 \cdot 10^{-8}} 0,15 + \frac{-6,0 \cdot 10^3}{14400 \cdot 10^{-8}} 0,09 = -7,73 \text{ МПа},$$

$$\sigma_C = \frac{M_z}{J_z} y_C + \frac{M_y}{J_y} z_C = \frac{-10,4 \cdot 10^3}{39200 \cdot 10^{-8}} (-0,15) + \frac{-6,0 \cdot 10^3}{14400 \cdot 10^{-8}} (-0,09) = 7,73 \text{ МПа}.$$

Эпюру нормальных напряжений построим, учитывая линейное распределение напряжений, откладывая ординаты σ_B и σ_C от базы эпюры, проведенной перпендикулярно нулевой линии (см. рис. 15).

5. Подбор сечения балки из прокатного двутавра

Заменим заданное сечение балки прокатным двутавром. Из условия прочности – формулы (15.13) [3] определим требуемое значение момента сопротивления

$$W_z \geq \frac{|M_z| + c|M_y|}{R_y}, \quad (10)$$

где $c = \frac{W_z}{W_y}$.

Для стандартных двутавров в зависимости от их размеров имеем $c = 6 \dots 14$. Примем в первом приближении среднее значение $c = 10$. По формуле (10) получим

$$W_z \geq \frac{|-10,4 \cdot 10^3| + 10 \cdot |-6,0 \cdot 10^3|}{210 \cdot 10^6} = 335 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 335 \text{ см}^3.$$

Из табл. А4 выберем подходящий прокатный профиль – двутавр № 27, у которого $W_z = 371 \text{ см}^3$, $W_y = 41,5 \text{ см}^3$.

Вычислим максимальное напряжение по формуле (15.11) [3]:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{|-10,4 \cdot 10^3|}{371 \cdot 10^{-6}} + \frac{|-6,0 \cdot 10^3|}{41,5 \cdot 10^{-6}} = 173 \cdot 10^6 \text{ Па} = 173 \text{ МПа}.$$

Проверим выполнение условия прочности по формуле (15.14) [3]:

$$\Delta = \frac{|\sigma_{\max} - R_y|}{R_y} 100 \% = \frac{|173 - 210|}{210} 100 \% = 17,6 \% > 5 \%.$$

Балка существенно недогружена.

Во втором приближении примем $c = \frac{W_z}{W_y} = \frac{371}{41,5} = 8,94$.

$$\text{Тогда } W_z \geq \frac{|-10,4 \cdot 10^3| + 8,94 \cdot |-6,0 \cdot 10^3|}{210 \cdot 10^6} = 305 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 305 \text{ см}^3.$$

Из табл. А4 выберем соответственно двутавр № 24а с моментами сопротивления $W_z = 317 \text{ см}^3$ и $W_y = 41,6 \text{ см}^3$.

Определим максимальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{|-10,4 \cdot 10^3|}{317 \cdot 10^{-6}} + \frac{|-6,0 \cdot 10^3|}{41,6 \cdot 10^{-6}} = 177 \text{ МПа}.$$

Сделаем проверку:

$$\Delta = \frac{|\sigma_{\max} - R_y|}{R_y} 100 \% = \frac{|177 - 210|}{210} 100 \% = 15,7 \% > 5 \%.$$

В третьем приближении примем $\frac{W_z}{W_y} = \frac{317}{41,6} = 7,62$.

$$\text{Получим } W_z \geq \frac{|-10,4 \cdot 10^3| + 7,62 \cdot |-6,0 \cdot 10^3|}{210 \cdot 10^6} = 267 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 267 \text{ см}^3.$$

Из табл. А4 выберем двутавр № 24 ($W_z = 289 \text{ см}^3$ и $W_y = 34,5 \text{ см}^3$), для которого

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{|-10,4 \cdot 10^3|}{289 \cdot 10^{-6}} + \frac{|-6,0 \cdot 10^3|}{34,5 \cdot 10^{-6}} = 210 \text{ МПа},$$

$$\Delta = \frac{|\sigma_{\max} - R_y|}{R_y} 100 \% = \frac{|210 - 210|}{210} 100 \% = 0.$$

Таким образом, окончательно выбираем двутавр № 24.

4. Совместное действие растяжения (сжатия) и изгиба

Задача 7. Расчет колонны на совместное действие растяжения (сжатия) и изгиба

В учебнике [1] – § 10.2, в пособии [3] – тема 16.

Условие. Колонна постоянного поперечного сечения нагружена системой сосредоточенных сил.

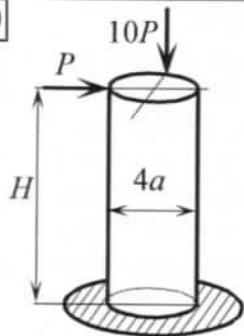
Требуется:

1. Составить расчетную схему колонны.
2. Построить эпюры продольных сил N и изгибающих моментов M_z, M_y .
3. В нижнем сечении колонны:
 - а) определить положение нулевой линии,
 - б) построить эпюру нормальных напряжений σ .

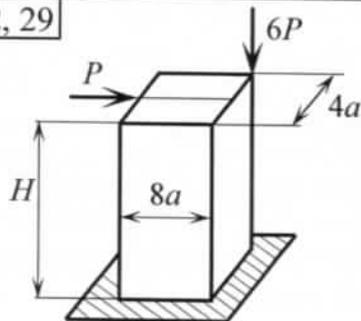
Алфавит	P , кН	a , см	H , см
	1	2	3
<i>а б в</i>	30	10	200
<i>г д е ё</i>	32	11	220
<i>ж з и й</i>	34	12	240
<i>к л м</i>	36	13	260
<i>н о п</i>	38	14	280
<i>р с т</i>	40	10	300
<i>у ф х</i>	42	11	320
<i>ц ч ш щ</i>	44	12	340
<i>ъ ы ь</i>	46	13	360
<i>э ю я</i>	48	14	380

Варианты расчетных схем

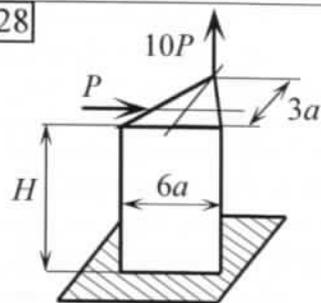
1, 30



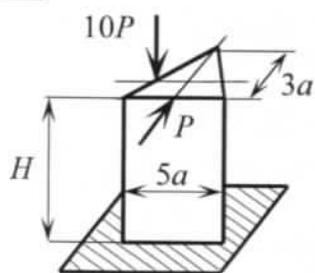
2, 29



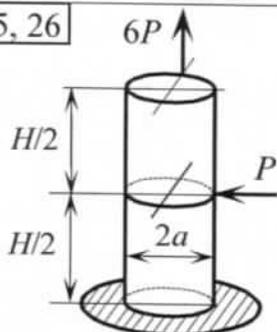
3, 28



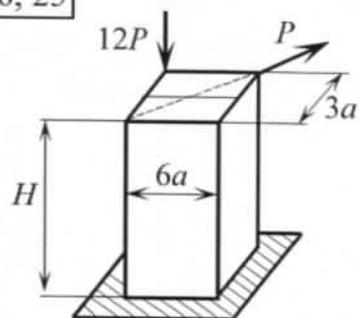
4, 27



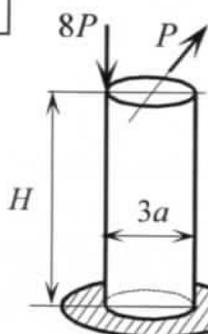
5, 26



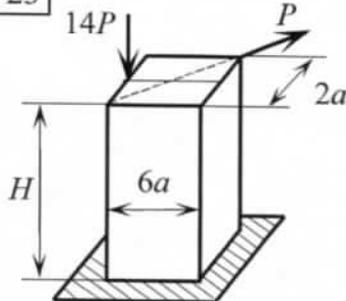
6, 25



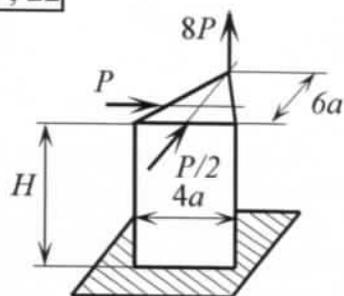
7, 24



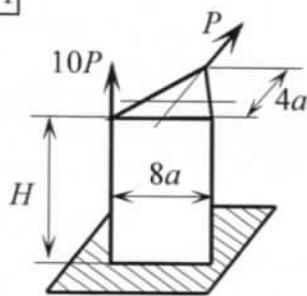
8, 23



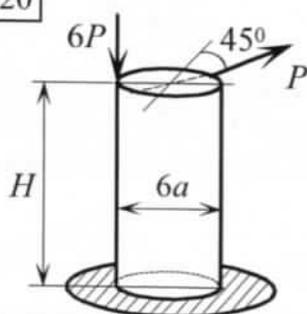
9, 22



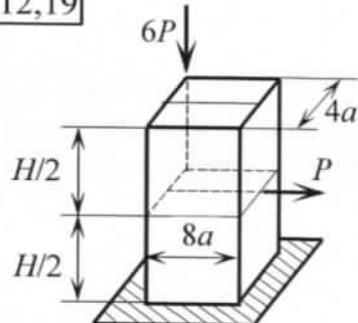
10, 21



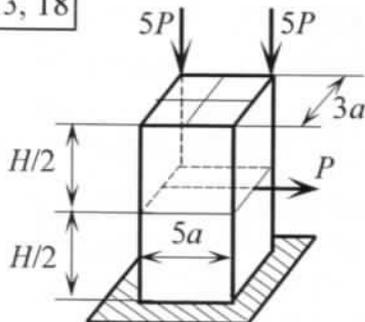
11, 20



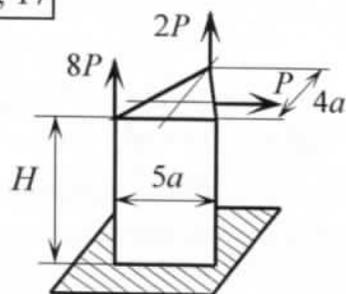
12, 19



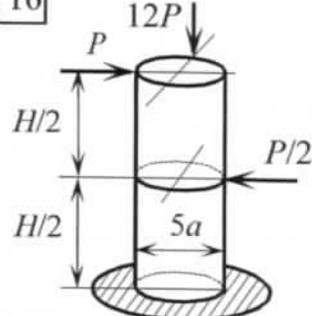
13, 18



14, 17



15, 16



Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По имени и фамилии (например, А. Лисин) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу.

А.	Л	и	с	и	и
1	2	3			
P , кН	a , см	H , см			
30	13	240			

2. Составление расчетной схемы колонны

На рис. 16 показаны размеры колонны и схема ее нагружения, выбранная в соответствии с учебным шифром студента.

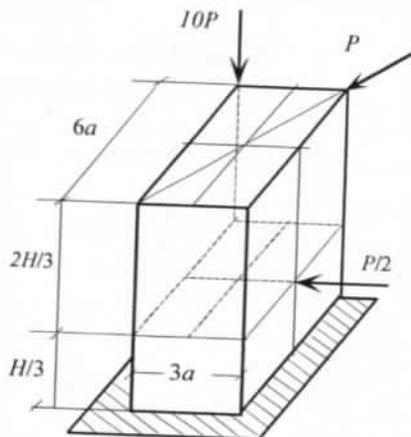


Рис. 16. Схема нагружения колонны

Внешние нагрузки обозначим следующим образом:

- вертикальная нагрузка $P_1 = 10P = 10 \cdot 30 = 300$ кН;
- горизонтальная нагрузка, действующая в верхнем сечении, $P_2 = P = 30$ кН;
- горизонтальная нагрузка, действующая в нижнем сечении, $P_3 = P / 2 = 15$ кН;
- угол наклона силы P_2 к оси y определим из следующего соотношения:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{78}{39}\right) = 63,4^\circ.$$

Выберем направление главных центральных осей поперечного сечения колонны – осей y , z , которое показано на рис. 17. Все нагрузки приведем к вертикальной оси колонны x : силы P_2 и P_3 переносим по линии их действия.

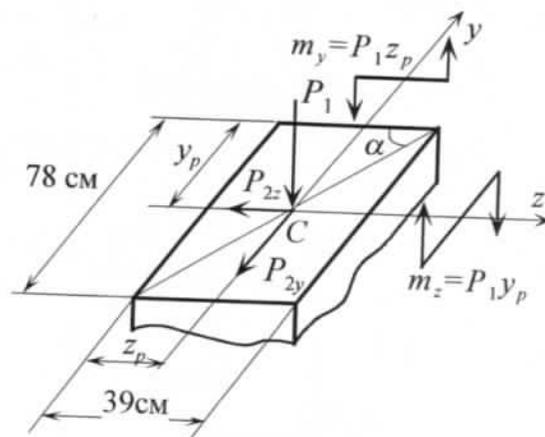


Рис. 17. Приведение внешних нагрузок к центру тяжести поперечного сечения

Нагрузку P_2 раскладываем на составляющие вдоль главных осей y и z :

$$P_{2z} = P_2 \cos \alpha = 30 \cdot 0,44 = 13,4 \text{ кН},$$

$$P_{2y} = P_2 \sin \alpha = 30 \cdot 0,89 = 26,8 \text{ кН}.$$

Нагрузку P_1 перенесем в центр тяжести верхнего сечения, при этом добавим сосредоточенные моменты, действующие относительно осей y и z (см. рис. 17):

$$m_y = P_1 z_p = 300 \cdot 0,195 = 58,5 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$m_z = P_1 y_p = 300 \cdot 0,38 = 117 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На рис. 18 представлена расчетная схема колонны со всеми действующими внешними нагрузками.

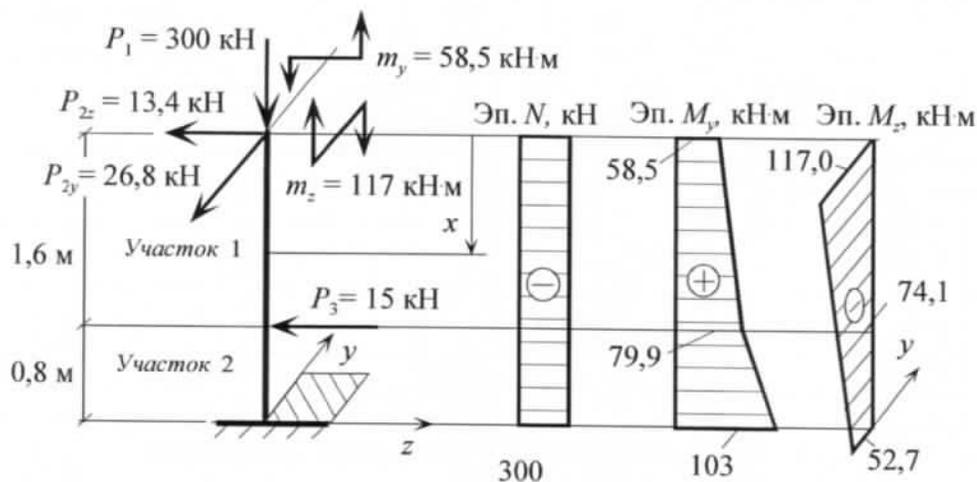


Рис. 18. Расчетная схема и эпюры N , M_y и M_z

3. Определение внутренних усилий N , M_y и M_z

На расчетной схеме выделим два участка и составим уравнения внутренних усилий, учитывая правила знаков первой четверти поперечного сечения: если изгибающий момент в первой четверти сечения вызывает деформации растяжения, то он считается положительным, а если сжатия – отрицательным. На рис. 18 первая четверть сечения заштрихована.

Участок 1

$$0 \leq x \leq 1,6 \text{ м}; N = -P_1 = -300 \text{ кН}, M_y = m_y + P_{2z}x, M_z = -m_z + P_{2y}x.$$

$$\text{При } x = 0 \quad M_y = 58,5 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_z = -117 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } x = 1,6 \text{ м} \quad M_y = 58,5 + 13,4 \cdot 1,6 = 79,9 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_z = -117,0 + 26,8 \cdot 1,6 = -74,1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 2

$$1,6 \leq x \leq 2,4 \text{ м}; N = -P_1 = -300 \text{ кН}; M_y = m_y + P_{2z}x + P_3(x - 1,6); M_z = -m_z + P_{2y}x.$$

$$\text{При } x = 1,6 \text{ м} \quad M_y = 79,9 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_z = -117 + 26,8 \cdot 1,6 = -74,1 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } x = 2,4 \text{ м} \quad M_y = 58,5 + 13,4 \cdot 2,4 + 15(2,4 - 1,6) = 103 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_z = -117,0 + 26,8 \cdot 2,4 = -52,7 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры N , M_y и M_z представлены на рис. 18. В расчетном (нижнем) сечении колонны имеем $N = -300 \text{ кН}$, $M_y = 103 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_z = -52,7 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

4. Определение положения нулевой линии

Определим геометрические характеристики поперечного сечения колонны (рис. 19):

– площадь поперечного сечения $A = 39 \cdot 78 = 3 \text{ 040 см}^2$;

– главные центральные моменты инерции:

$$J_z = \frac{39 \cdot 78^3}{12} = 1540000 \text{ см}^4, \quad J_y = \frac{78 \cdot 39^3}{12} = 386000 \text{ см}^4;$$

– квадраты радиусов инерции:

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{1540000}{3040} = 507 \text{ см}^2, \quad i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{386000}{3040} = 127 \text{ см}^2.$$

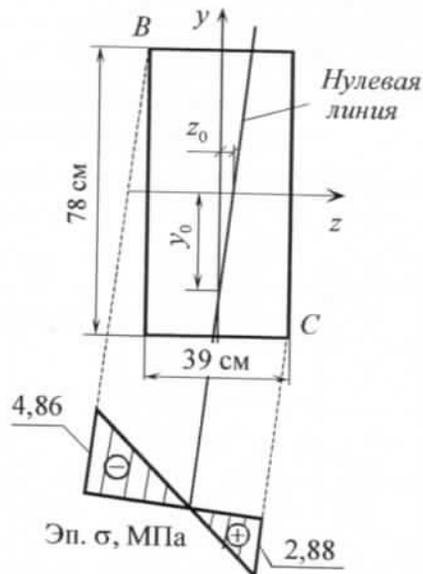


Рис. 19. Положение нулевой линии, эпюра напряжений σ

Положение нулевой линии определяется отрезками z_0 и y_0 , которые она отсекает на координатных осях z и y , по формулам (16.3) и (16.4) [3]:

$$y_0 = -\frac{N}{M_z} i_z^2, \quad z_0 = -\frac{N}{M_y} i_y^2,$$

где i_z и i_y – радиусы инерции поперечного сечения колонны.

Получим отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях y и z :

$$z_0 = -\frac{-300}{103} 127 \cdot 10^{-4} = 3,7 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,7 \text{ см},$$

$$y_0 = -\frac{-300}{-52,7} 507 \cdot 10^{-4} = -28,9 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -28,9 \text{ см}.$$

На рис. 19 представлена нулевая линия, проходящая через концы отрезков z_0 и y_0 .

5. Построение эпюры напряжений

Эпюру напряжений σ строим от базы, перпендикулярной нулевой линии, рассчитав напряжения в опасных точках B и C (см. рис. 19). Величину напряжений в этих точках определим по формуле (16.1) [3]:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z.$$

Напряжение в точке B равно:

$$\sigma_B = \frac{-300 \cdot 10^3}{3040 \cdot 10^{-4}} + \frac{-52,7 \cdot 10^3}{1540000 \cdot 10^{-8}} 39 \cdot 10^{-2} + \frac{103 \cdot 10^3}{386000 \cdot 10^{-8}} (-19,5 \cdot 10^{-2}) = -4,86 \text{ МПа}.$$

Напряжение в точке C составит:

$$\sigma_C = \frac{-300 \cdot 10^3}{3040 \cdot 10^{-4}} + \frac{-52,7 \cdot 10^3}{1540000 \cdot 10^{-8}} (-39 \cdot 10^{-2}) + \frac{103 \cdot 10^3}{386000 \cdot 10^{-8}} 19,5 \cdot 10^{-2} = 2,88 \text{ МПа}.$$

Задача 8. Расчет колонны на внецентренное сжатие

В учебнике [1] – § 10.2, в пособии [3] – тема 16.

Условие. Колонна сжимается силой P , внецентренно приложенной в заданной точке поперечного сечения. Собственный вес колонны не учитывать.

Требуется:

1. Определить положение главных центральных осей, главные моменты и радиусы инерции сечения.
2. Найти положение нулевой линии и указать опасные точки.
3. Определить нормальные напряжения в опасных точках и построить эпюру нормальных напряжений.
4. Построить ядро сечения.

Алфавит	Точка приложения силы P	P , кН	H , см	h , см	B , см	b , см
	1	2	3	4	5	6
<i>а б в</i>	<i>F</i>	100	180	40	90	40
<i>г д е ё</i>	<i>E</i>	150	160	44	94	45
<i>ж з и й</i>	<i>D</i>	200	140	48	98	50
<i>к л м</i>	<i>F</i>	250	120	52	100	48
<i>н о п</i>	<i>E</i>	300	100	54	104	44
<i>р с т</i>	<i>D</i>	350	180	60	102	40
<i>у ф х</i>	<i>F</i>	330	160	50	100	38
<i>ц ч ш щ</i>	<i>E</i>	290	140	40	96	34
<i>ъ ы ь</i>	<i>D</i>	240	120	54	92	30
<i>э ю я</i>	<i>F</i>	200	100	60	90	50

Варианты сечений колонны

1, 16		2, 17	3, 18
4, 19		5, 20	6, 21
7, 22		8, 23	9, 24
10, 25		11, 26	12, 27
13, 28		14, 29	15, 30

Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По имени и фамилии (например, В. Флягин) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу. Вариант сечения колонны принимаем в соответствии с учебным шифром.

В.	Ф	л	я	г	и	и
1	2	3	4	5	6	
Точка приложения силы P	P , кН	H , см	h , см	B , см	b , см	
F	330	120	60	94	50	

В столбцах данных, которые не используются в расчетной схеме необходимо поставить прочерк.

2. Определение центра тяжести и геометрических характеристик сечения

Изобразим сечение в масштабе и разобьем на простые фигуры – прямоугольник 1 и треугольники 2, 3 (рис. 20). Найдем их площади:

$$A_1 = Bh = 94 \cdot 60 = 5640 \text{ см}^2,$$

$$A_2 = A_3 = \frac{1}{2}(B-b) \frac{H-h}{2} = \frac{1}{2}(94-50) \frac{120-60}{2} = 660 \text{ см}^2.$$

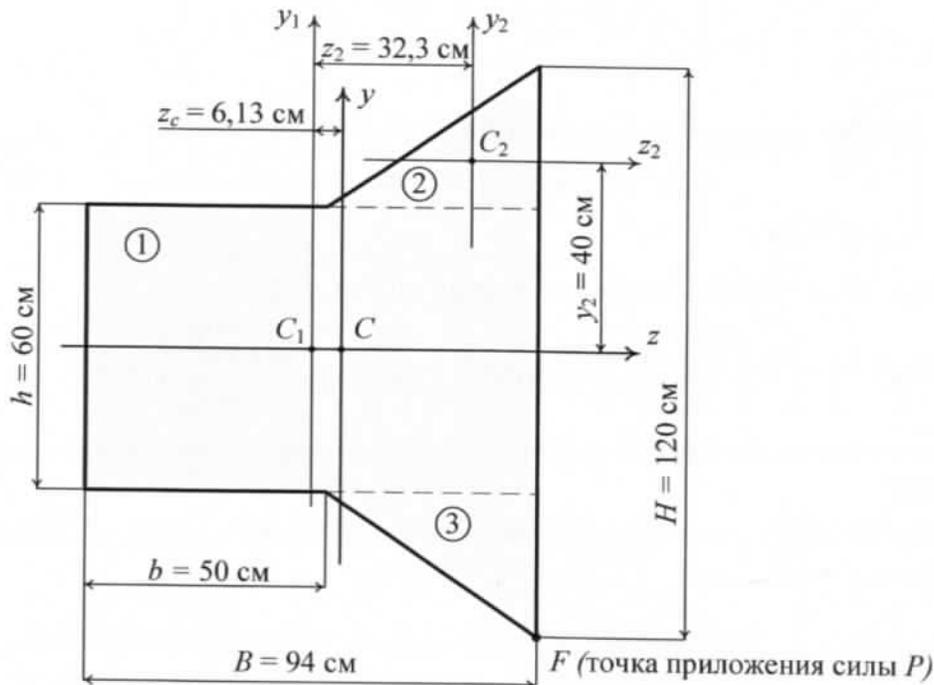


Рис. 20. Поперечное сечение колонны

Общая площадь сечения $A = A_1 + 2A_2 = 5640 + 2 \cdot 660 = 6960 \text{ см}^2$.

Определим положение центра тяжести сечения, используя формулы (9.2) [2]:

$$z_C = \frac{S_{y_0}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i A_i}{A}, \quad y_C = \frac{S_{z_0}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{A}, \quad (11)$$

где z_C и y_C – координаты центра тяжести сечения относительно вспомогательных осей y_0 и z_0 ; z_i и y_i – координаты центра тяжести i -й фигуры; A_i – площадь i -й фигуры.

У сечения, имеющего ось симметрии, центр тяжести лежит на этой оси. В нашем случае ось z является осью симметрии сечения, поэтому $y_C = 0$.

Для определения координаты z_C выберем в качестве вспомогательной оси центральную ось прямоугольника y_1 . Тогда

$$z_1 = 0; \quad z_2 = \frac{B}{2} - \frac{B-b}{3} = \frac{94}{2} - \frac{94-50}{3} = 32,3 \text{ см.}$$

Вычислим по первой формуле из (11) координату центра тяжести сечения:

$$z_C = \frac{z_1 A_1 + 2z_2 A_2}{A} = \frac{0 \cdot 5640 + 2 \cdot 32,3 \cdot 660}{6960} = 6,13 \text{ см.}$$

На чертеже покажем положение общего центра тяжести сечения – точки C (см. рис. 20) и проведем через него главные центральные оси z и y .

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей определим по формулам (9.7) [2]:

$$\begin{aligned} J_z &= \frac{Bh^3}{12} + 2 \left(\frac{(B-b)((H-h)/2)^3}{36} + y_2^2 A_2 \right) = \\ &= \frac{94 \cdot 60^3}{12} + 2 \left(\frac{(94-50)((120-60)/2)^3}{36} + 40^2 \cdot 660 \right) = 3,87 \cdot 10^6 \text{ см}^4; \\ J_y &= \left(\frac{hB^3}{12} + A_1 z_C^2 \right) + 2 \left(\frac{((H-h)/2)(B-b)^3}{36} + (z_2 - z_C)^2 A_2 \right) = \\ &= \left(\frac{60 \cdot 94^3}{12} + 5640 \cdot 6,13^2 \right) + 2 \left(\frac{((120-60)/2)(94-50)^3}{36} + (32,3-6,13)^2 \cdot 660 \right) = \\ &= 5,41 \cdot 10^6 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Определим радиусы инерции сечения по (9.12) [2]:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{3,87 \cdot 10^6}{6960}} = 23,6 \text{ см}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{5,41 \cdot 10^6}{6960}} = 27,9 \text{ см.}$$

3. Определение положения нулевой линии и построение эпюры нормальных напряжений

По условию задачи сила, сжимающая колонну, приложена в точке F (рис. 21). Следовательно,

$$z_p = \frac{B}{2} - z_C = \frac{94}{2} - 6,13 = 40,9 \text{ см}; \quad y_p = -\frac{H}{2} = -\frac{120}{2} = -60,0 \text{ см},$$

где z_p и y_p – координаты точки приложения силы.

Найдем отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях y и z (см. рис. 21), по формулам (16.7) [3]:

$$z_0 = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{27,9^2}{40,9} = -19,0 \text{ см}; \quad y_0 = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{23,6^2}{-60,0} = 9,28 \text{ см.}$$

Откладываем на чертеже сечения отрезки y_0 и z_0 с учетом знаков. Знак минус означает, что отрезок z_0 откладывается влево от центра тяжести. Отрезок y_0 откладывается вверх. Через концы данных отрезков проводим нулевую линию (см. рис. 21).

Определим нормальные напряжения в опасных точках, где они достигают максимальных значений. Это точки F и K , наиболее удаленные от нулевой линии.

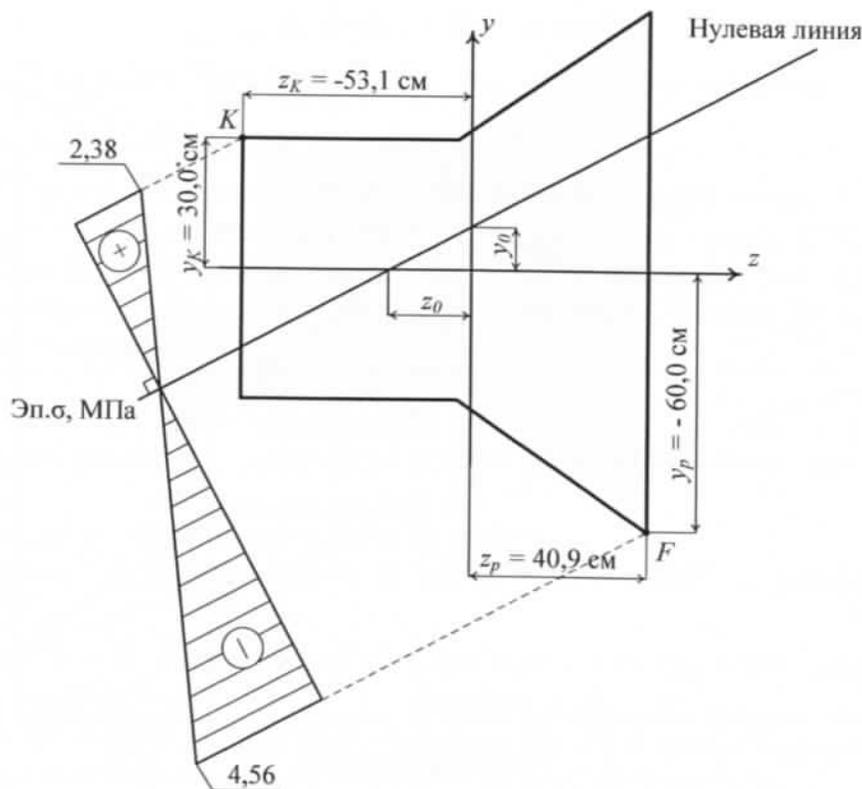


Рис. 21. Положение нулевой линии и эпюра нормальных напряжений

Нормальные напряжения вычислим по формуле (16.5) [3]:

$$\begin{aligned}\sigma_F &= -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_p}{i_z^2} y_F + \frac{z_p}{i_y^2} z_F \right) = \\ &= -\frac{330 \cdot 10^3}{6960 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{-0,6}{23,6^2 \cdot 10^{-4}} (-0,6) + \frac{0,409}{27,9^2 \cdot 10^{-4}} 0,409 \right) = -4,56 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_K &= -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_p}{i_z^2} y_K + \frac{z_p}{i_y^2} z_K \right) = \\ &= -\frac{330 \cdot 10^3}{6960 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{-0,6}{23,6^2 \cdot 10^{-4}} 0,3 + \frac{0,409}{27,9^2 \cdot 10^{-4}} (-0,531) \right) = 2,38 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Построим эпюру нормальных напряжений, откладывая ординаты σ_F и σ_K от базы эпюры, проведенной перпендикулярно нулевой линии (см. рис. 21).

4. Построение ядра сечения

Координаты точек на контуре ядра сечения определим по формуле (16.8) [3].

Контурной точкой ядра сечения является точка внецентренно приложенной силы, когда нулевая линия касается контура сечения. Проведем нулевую линию $l-l$ как касательную к сечению (рис. 22).

Отрезки, отсекаемые линией $l-l$ на главных осях, равны: $z_{01} = 40,9$ см, $y_{01} = \infty$, так как линия $l-l$ параллельна оси y . Нулевой линии $l-l$ соответствует характерная точка ядра сечения (ядровая точка) l со следующими координатами:

$$z_{p1} = -\frac{i_y^2}{z_{01}} = -\frac{27,9^2}{40,9} = -19,0 \text{ см}, \quad y_{p1} = -\frac{i_z^2}{y_{01}} = -\frac{23,6^2}{\infty} = 0.$$

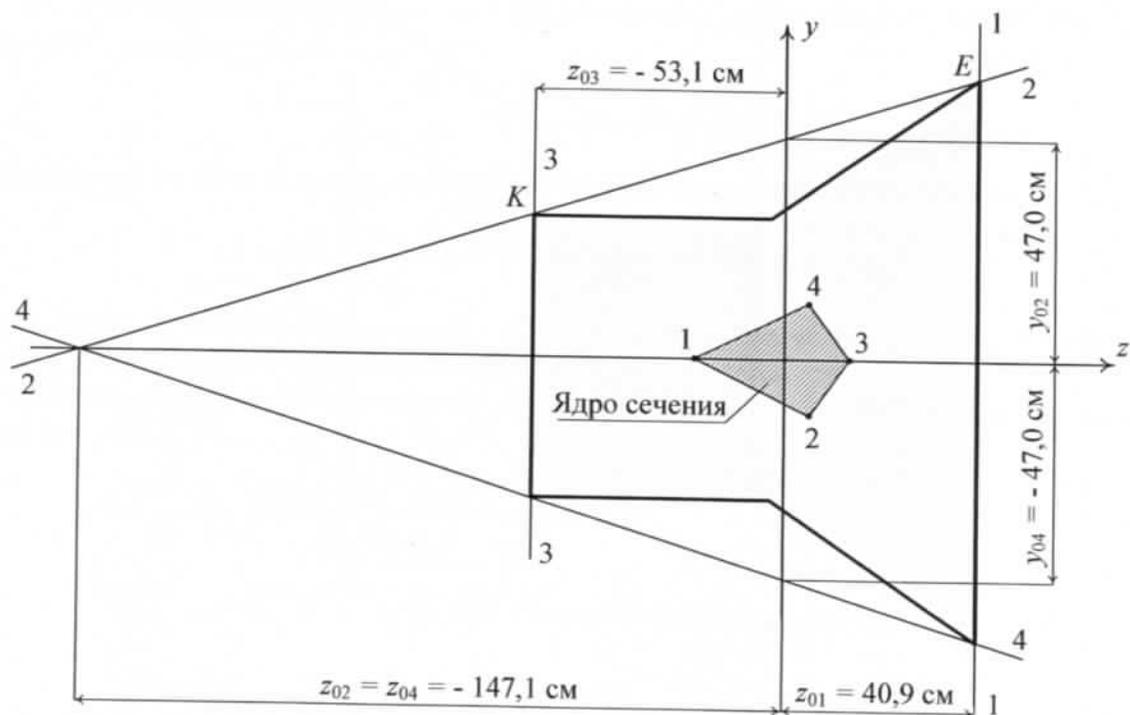


Рис. 22. Ядро сечения

Для нахождения отрезков, отсекаемых нулевой линией 2-2 на осях, определим тангенс угла наклона касательной 2-2

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{30}{94} = 0,319.$$

Отрезки, отсекаемые нулевой линией 2-2 на координатных осях, равны:

$$z_0 = \frac{60}{\operatorname{tg} \alpha} - 40,9 = 188 - 40,9 = 147,1 \text{ см};$$

$$y_0 = z_0 \operatorname{tg} \alpha = 147,1 \cdot 0,319 = 47 \text{ см}.$$

Координаты соответствующей ядровой точки 2:

$$z_{p2} = -\frac{27,9^2}{-147,1} = 5,29 \text{ см}, \quad y_{p2} = -\frac{23,6^2}{47,0} = -11,9 \text{ см}.$$

Проведем остальные нулевые линии, касательные к контуру сечения, и определим отрезки, отсекаемые ими на осях, и координаты ядровых точек:

линия 3-3: $z_{03} = -53,1 \text{ см}$, $y_{03} = \infty$, соответственно координаты точки 3 равны:

$$z_{p3} = -\frac{27,9^2}{-53,1} = 14,7 \text{ см}, \quad y_{p3} = -\frac{23,6^2}{\infty} = 0;$$

линия 4-4 (симметрична линии 2-2): $z_{04} = z_{02} = -147,1 \text{ см}$, $y_{04} = -y_{02} = -47,0 \text{ см}$, соответственно координаты ядровой точки 4 равны:

$$z_{p4} = -\frac{27,9^2}{-147,1} = 5,29 \text{ см}, \quad y_{p4} = -\frac{23,6^2}{-47,0} = 11,9 \text{ см}.$$

На чертеже покажем четыре точки, определяющие контур ядра сечения. Соединив точки отрезками, получим ядро сечения (см. рис. 22).

5. Изгиб с кручением

Задача 9. Расчет промежуточного вала механизма

В учебнике [1] – § 10.4, в пособии [3] – темы 17, 18.

Условие. Дан механизм, в состав которого входит промежуточный вал, приводимый в движение ременной и зубчатой передачами. Материал вала – сталь 40ХН с расчетным сопротивлением $R_y = 400$ МПа; мощность двигателя N ; число оборотов двигателя n ; передаточное число от двигателя к валу i ; диаметры шкива ременной передачи и шестерен D_1 и D_2 соответственно.

Требуется:

- Составить расчетную схему промежуточного вала механизма, для чего определить:
 - крутящий момент, передающийся от двигателя;
 - окружную F и радиальную R силы, действующие на шестерни, считая $R = 0,3F$;
 - усилия S_1 и S_2 в набегающей и сбегающей ветвях ременной передачи, считая $S_1 = 2S_2$.
- Построить эпюры изгибающих моментов M_z , M_y и эпюру крутящих моментов $M_{кр}$. Найти для опасных сечений суммарный изгибающий момент $M_{из}$.
- Подобрать диаметр вала по III теории прочности.

Алфавит	Длина участков, см			N , кВт	n , об/мин	D_1 , мм	D_2 , мм	i
	a	b	c					
	1	2	3					
$a \ \bar{b} \ v$	8	12	6	5	900	150	60	2,5
$z \ \bar{d} \ e \ \bar{e}$	9	11	7	6	1000	160	70	3
$ж \ z \ u \ \bar{y}$	10	10	8	7	630	170	75	2
$k \ l \ m$	11	9	9	8	910	180	90	2,5
$n \ o \ p$	12	8	10	9	570	190	100	1,5
$r \ s \ t$	6	7	11	10	830	200	110	2
$y \ \bar{f} \ x$	8	6	12	11	510	210	120	2,5
$\bar{c} \ \bar{c} \ u \ \bar{c}$	9	12	11	12	575	220	130	3
$\bar{y} \ \bar{y} \ \bar{y}$	10	11	10	14	630	230	150	3,5
$\bar{z} \ \bar{y} \ \bar{y}$	11	10	9	15	575	240	100	1,5

Варианты расчетных схем

<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1, 30</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2, 29</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3, 28</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4, 27</div> </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5, 26</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6, 25</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7, 24</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8, 23</div> </div>
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9, 22</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10, 21</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11, 20</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">12, 19</div> </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">13, 18</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">14, 17</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">16</div> </div>

Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По имени и фамилии (например, С. Ивлев) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу. Вариант расчетной схемы выбираем в соответствии с учебным шифром студента (рис. 23, а).

С.	И	в	л	е	в	С.	И
1	2	3	4	5	6	7	8
<i>a</i> , см	<i>b</i> , см	<i>c</i> , см	<i>N</i> , кВт	<i>n</i> , об/мин	<i>D</i> ₁ , мм	<i>D</i> ₂ , мм	<i>i</i>
6	10	6	8	1 000	150	110	2

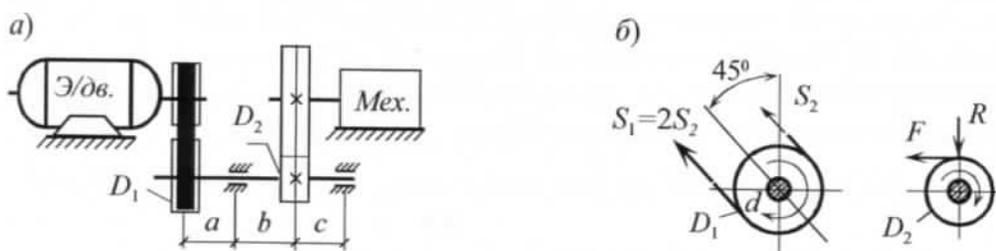


Рис. 23. Схемы механизма (а) и действия усилий в ременной и зубчатой передачах (б)

2. Построение расчетной схемы промежуточного вала

Определим крутящий момент, передающийся от двигателя на промежуточный вал,

$$M = 9\,550 \frac{N}{n} i = 9\,550 \cdot \frac{8}{1\,000} \cdot 2 = 153 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

где *i* – передаточное число от двигателя к валу, *i* = 2.

Определим усилия натяжения в ременной передаче (см. рис. 23, б):

– усилие в сбегавшей ветви $S_2 = \frac{2M}{D_1} = \frac{2 \cdot 153}{150 \cdot 10^{-3}} = 2\,040 \text{ Н};$

– усилие в набегающей ветви $S_1 = 2S_2 = 2 \cdot 2\,040 = 4\,080 \text{ Н};$

– результирующее усилие $S = 3S_2 = 3 \cdot 2\,040 = 6\,120 \text{ Н}.$

Определим усилия, действующие на шестерню промежуточного вала:

– окружное усилие $F = \frac{2M}{D_2} = \frac{2 \cdot 153}{110 \cdot 10^{-3}} = 2\,780 \text{ Н};$

– радиальное усилие $R = 0,3F = 0,3 \cdot 2\,780 = 837 \text{ Н}.$

Определим вертикальные и горизонтальные составляющие усилий со стороны ременной и зубчатой передач:

$$S_r = \frac{3}{2} S_1 \cos 45^\circ = \frac{3}{2} 4\,080 \cdot 0,707 = 4\,330 \text{ Н};$$

$$S_n = \frac{3}{2} S_1 \sin 45^\circ = \frac{3}{2} 4\,080 \cdot 0,707 = 4\,330 \text{ Н};$$

$$F_r = F = 2\,780 \text{ Н}; \quad F_n = 0; \quad R_r = 0; \quad R_n = R = 837 \text{ Н}.$$

Все усилия переносим на расчетную схему промежуточного вала (рис. 24) и направляем в соответствии с их пространственной ориентацией (см. рис. 23, б).

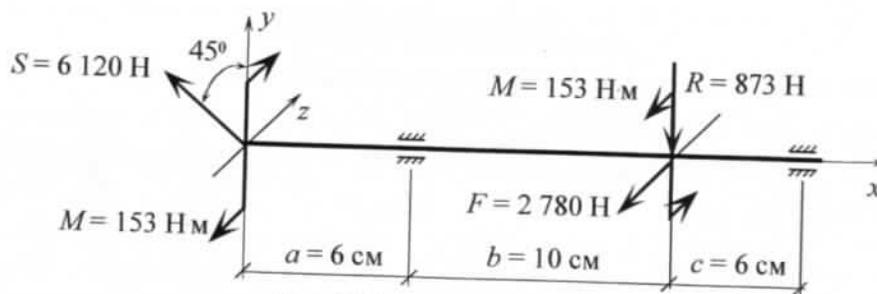


Рис. 24. Расчетная схема вала

3. Определение изгибающих и крутящих моментов

От внешних нагрузок промежуточный вал испытывает три вида деформации: кручение от момента M ; изгиб в вертикальной плоскости от вертикальных усилий S_B, R_B ; изгиб в горизонтальной плоскости от горизонтальных усилий S_G, F_G . Рассмотрим три расчетных схемы (рис. 25).

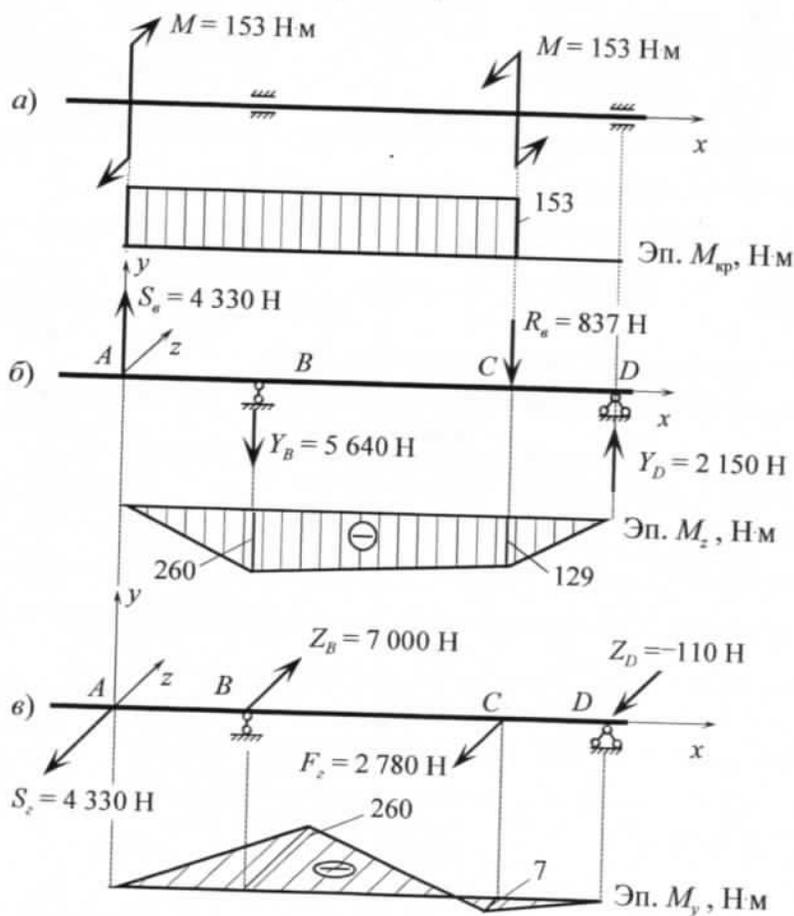


Рис. 25. Эпюры изгибающих и крутящих моментов

Кручение (см. рис. 25, а). Крутящий момент на участках a и b постоянный: $M_{кр} = M = 153$ Н·м, а на участке c он равен: $M_{кр} = 0$.

Изгиб в вертикальной плоскости (см. рис. 25, б). Определим опорные реакции Y_B и Y_D из уравнений статики:

$$\sum m_D = -4330 \cdot 22 + 837 \cdot 6 + Y_B \cdot 16 = 0,$$

$$Y_B = \frac{4330 \cdot 22 - 837 \cdot 6}{16} = 5640 \text{ Н};$$

$$\sum F_y = 4330 - 837 - Y_B + Y_D = 0,$$

$$Y_D = -4\,330 + 837 + 5\,640 = 2\,150 \text{ Н.}$$

Вычислим значения M_z в характерных сечениях вала (сечения A, B, C, D):

$$M_{z,A} = M_{z,D} = 0;$$

$$M_{z,B} = -4\,330 \cdot 0,06 = -260 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{z,C} = -2\,150 \cdot 0,06 = -129 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Изгиб в горизонтальной плоскости (см. рис. 25, в). Определим опорные реакции Z_B и Z_D из уравнений статики:

$$\sum m_D = 4\,330 \cdot 22 + 2\,780 \cdot 6 - Z_B \cdot 16 = 0,$$

$$Z_B = \frac{4\,330 \cdot 22 + 2\,780 \cdot 6}{16} = 7\,000 \text{ Н};$$

$$\sum F_y = -4\,330 - 2\,780 + Z_B - Z_D = 0,$$

$$Z_D = -4\,330 - 2\,780 + 7\,000 = -110 \text{ Н.}$$

Рассчитаем значения M_y в характерных сечениях вала (сечения A, B, C, D):

$$M_{y,A} = M_{y,D} = 0;$$

$$M_{y,B} = 4\,330 \cdot 0,06 = 260 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{y,C} = 110 \cdot 0,06 = 7 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Знаки M_z и M_y расставляем в соответствии с правилом первой четверти сечения [3].

По значениям моментов строим эпюры M_z и M_y (см. рис. 25, б, в). Эпюры изгибающих моментов строим в плоскости действия соответствующего момента: эпюру M_y – в плоскости xz ; эпюру M_z – в плоскости xy .

В опасном сечении вала (сечение B) определим величину суммарного изгибающего момента по формуле (18.1) [3]:

$$M_n = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{260^2 + 260^2} = 367 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

4. Определение диаметра вала по III теории прочности

Для определения диаметра поперечного сечения вала используем условие прочности на изгиб с кручением – формулу (18.4) [3]:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_z} \leq R_y. \quad (12)$$

Расчетный момент, соответствующий III теории прочности, определим, используя значения суммарного изгибающего M_n и крутящего момента $M_{\text{кр}}$ в сечении B по формуле (18.2) [3]:

$$M_{\text{расч}} = \sqrt{M_n^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{367^2 + 153^2} = 398 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

По формуле (12) вычислим требуемый момент сопротивления вала

$$W_z \geq \frac{M_{\text{расч}}}{R_y} = \frac{398}{400 \cdot 10^6} = 9,95 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3 = 995 \text{ мм}^3.$$

Момент сопротивления сечения в виде круга выразим через диаметр:

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} \geq 995 \text{ мм}^3.$$

Из последнего неравенства получим требуемое значение диаметра стержня

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 995}{\pi}} = 21,6 \text{ мм.}$$

Принимаем диаметр вала $d = 22 \text{ мм}$.

Задача 10. Расчет стержня с пространственной осью

В учебнике [1] – § 10.4, в пособии [3] – темы 17, 18.

Условие. Стержень круглого поперечного сечения с ломанной осью нагружен сосредоточенными силой P и моментом m .

Требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов M_z , M_y и эпюру крутящих моментов $M_{кр}$.
2. По IV теории прочности определить диаметр стержня, пренебрегая влиянием продольной силы. Расчетное сопротивление материала принять $R_y = 200$ МПа.
3. В опасной точке определить главные напряжения и проверить прочность стержня.

Алфавит	a , м	b , м	P , кН	m , кН·м
	1	2	3	4
<i>а б в</i>	1,0	1,0	3,0	8
<i>г д е ё</i>	1,2	1,2	2,5	9
<i>ж з и й</i>	1,4	1,4	4,0	10
<i>к л м</i>	1,6	1,6	4,5	11
<i>н о п</i>	1,8	1,8	5,0	12
<i>р с т</i>	1,7	1,7	5,5	13
<i>у ф х</i>	1,5	1,5	6,0	14
<i>ц ч ш щ</i>	1,3	1,3	6,5	15
<i>ъ ы ь</i>	1,1	1,1	7,0	16
<i>э ю я</i>	0,9	1,0	7,5	17

Варианты расчетных схем

①	②	③	④	⑤
⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
⑪	⑫	⑬	⑭	⑮
⑯	⑰	⑱	⑲	⑳
㉑	㉒	㉓	㉔	㉕
㉖	㉗	㉘	㉙	㉚

Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По имени и фамилии (например, С. Ивлев) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу. Вариант расчетной схемы выбираем в соответствии с учебным шифром студента (рис. 26).

С.	И	в	л	е	в
1	2	3	4		
<i>a</i> , м	<i>b</i> , м	<i>P</i> , кН	<i>m</i> , кН·м		
1,7	1,4	3	11		

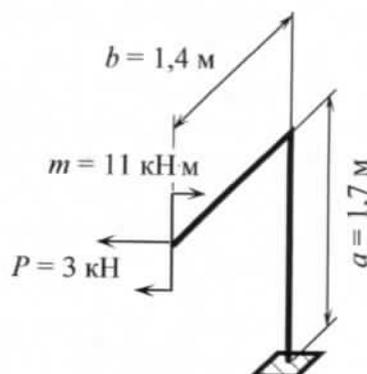


Рис. 26. Расчетная схема пространственного стержня

2. Определение внутренних усилий

Используя метод сечений, определим значения внутренних усилий M_y , M_z и $M_{кр}$. Для двух участков стержня (*AB* и *BC* на рис. 27) покажем отсеченную часть и направление осей координат, учитывая, что ось *x* должна быть ориентирована вдоль продольной оси стержня.

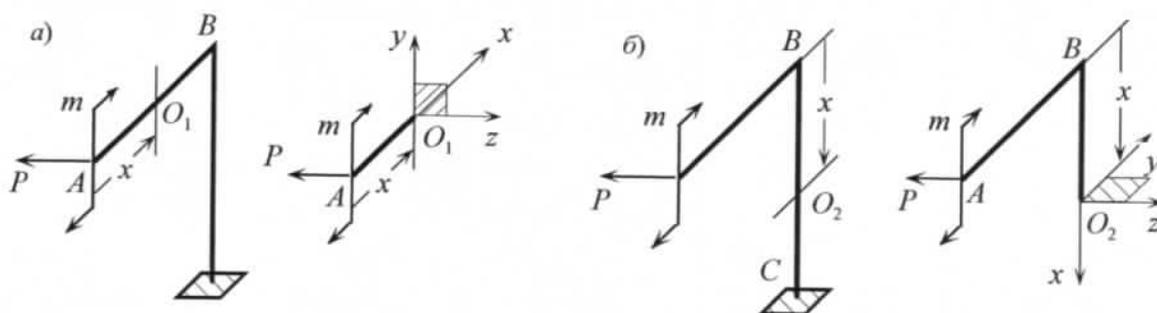


Рис. 27. Схема выбора отсеченной части:
а – для участка *AB*; б – для участка *BC*

Участок *AB*

$$0 \leq x \leq 1,4 \text{ м}; M_{кр} = 0, M_z = -m = -11 \text{ кН·м}, M_y = Px.$$

$$\text{При } x = 0 \quad M_y = 0; \text{ при } x = 1,4 \text{ м} \quad M_y = 3 \cdot 1,4 = 4,2 \text{ кН·м.}$$

Участок *BC*

$$0 \leq x \leq 1,7 \text{ м}; M_{кр} = P \cdot (AB) = 3 \cdot 1,4 = 4,2 \text{ кН·м}, M_z = -m = -11 \text{ кН·м}, M_y = Px.$$

$$\text{При } x = 0 \quad M_z = 0; \text{ при } x = 1,7 \text{ м} \quad M_z = 3 \cdot 1,7 = 5,1 \text{ кН·м.}$$

Знаки изгибающих моментов выбираются в соответствии с правилом первой четверти сечения (первая четверть поперечного сечения на рис. 27, *a* и *b* заштрихована). Для крутящего момента $M_{кр}$ определяется только его значение без учета правила знаков.

По найденным значениям моментов строим соответствующие эпюры (рис. 28). Эпюры изгибающих моментов строятся в плоскости действия момента: эпюра M_y – в плоскости xz ; эпюра M_z – в плоскости xy .

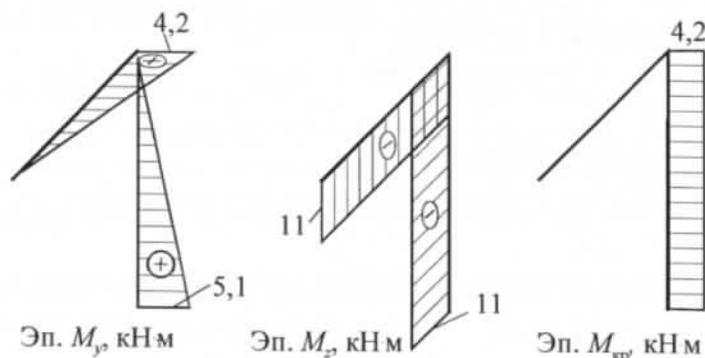


Рис. 28. Эпюры изгибающих и крутящих моментов

Анализируя эпюры моментов, определяем, что на участке BC реализуется сложное сопротивление стержня – изгиб с кручением. В опасном сечении – заделке, где $M_y = 5,1$ кН·м; $M_z = -11$ кН·м; $M_{кр} = 4,2$ кН·м, вычислим суммарный изгибающий момент по формуле (18.1) [3]:

$$M_{\text{и}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{5,1^2 + 11^2} = 12,1 \text{ кН·м.}$$

3. Расчет диаметра стержня по IV теории прочности

Для определения диаметра стержня используем условие прочности вала на изгиб с кручением – формулу (18.4) [3]:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_z} \leq R_y. \quad (13)$$

Расчетный момент $M_{\text{расч}}$, соответствующий IV теории прочности, в опасном сечении стержня определим, используя значения суммарного изгибающего $M_{\text{и}}$ и крутящего момента $M_{\text{кр}}$, по формуле (18.3) [3]:

$$M_{\text{расч}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{12,1^2 + 0,75 \cdot 4,2^2} = 12,6 \text{ кН·м.}$$

По формуле (13) вычисляем требуемое значение момента сопротивления стержня

$$W_z \geq \frac{M_{\text{расч}}}{R_y} = \frac{12,6 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 6,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 63 \text{ см}^3.$$

Используя формулу для расчета момента сопротивления, определим значение диаметра: $W_z = \frac{\pi d^3}{32} \geq 63 \text{ см}^3$, откуда $d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 63}{\pi}} = 8,63 \text{ см.}$

$$\text{При } d = 8,63 \text{ см момент сопротивления } W_z = \frac{\pi \cdot 8,63^3}{32} = 63,1 \text{ см}^3.$$

4. Определение главных напряжений и проверка прочности

Определим главные напряжения, действующие в опасной точке. Опасной является та точка в сечении, в которой нормальные напряжения σ максимальны:

$$\sigma = \frac{M_{\text{и}}}{W_z} = \frac{12,1 \cdot 10^3}{63,1 \cdot 10^{-6}} = 192 \cdot 10^6 \text{ Па} = 192 \text{ МПа.}$$

От кручения стержня в этой точке действуют касательные напряжения, которые определим по формуле

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{M_{кр}}{2W_z} = \frac{4,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 63,1 \cdot 10^{-6}} = 33,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 33,3 \text{ МПа.}$$

Далее по значениям σ и τ вычислим главные напряжения σ_1 и σ_3 :

– максимальное главное напряжение

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{192}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{192^2 + 4 \cdot 33,3^2} = 198 \text{ МПа};$$

– минимальное главное напряжение

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{192}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{192^2 + 4 \cdot 33,3^2} = -5,8 \text{ МПа.}$$

Проверим прочность стержня, используя условие IV теории прочности – формулу (17.18) [3]:

$$\sigma_{расч} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R_y.$$

Условие прочности выполняется, так как расчетное напряжение равно R_y :

$$\sigma_{расч} = \sqrt{192^2 + 3 \cdot 33,3^2} \approx 200 = R_y = 200 \text{ МПа.}$$

6. Устойчивость сжатых стержней

Задача 11. Расчет стержневой системы на устойчивость

В учебнике [1] – § 11.1–11.4, в пособии [3] – тема 19.

Условие. В заданной стержневой системе стальной стержень испытывает деформацию сжатия. Форма и размеры поперечного сечения стержня заданы. Принять: расчетное сопротивление $R_y = 200$ МПа, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Требуется:

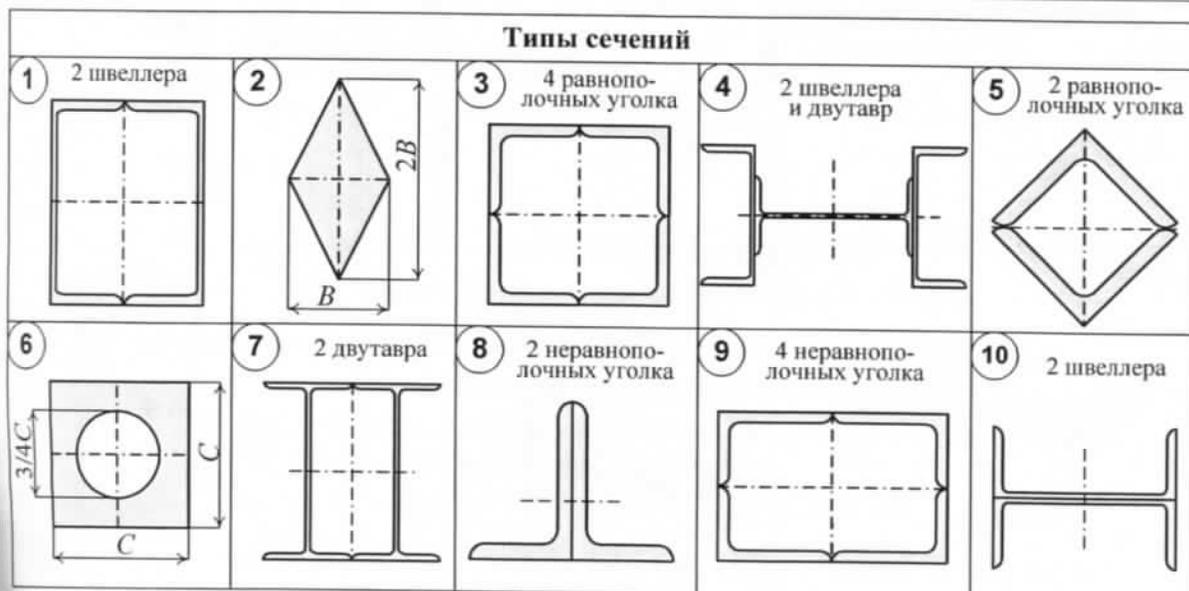
1. Определить геометрические характеристики поперечного сечения и гибкость сжатого стержня. Если гибкость стержня $\lambda > 160$, то необходимо уменьшить его длину, приняв $\lambda = 160$.

2. Определить критическую продольную силу $N_{кр}$ и критическое напряжение $\sigma_{кр}$ в сжатом стержне. При гибкости стержня $\lambda \geq 100$ следует использовать формулу Эйлера, а при $\lambda < 100$ – формулу Ясинского, приняв коэффициенты $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа.

3. Из условия устойчивости определить допускаемую продольную силу $N_{доп}$ и допускаемое напряжение $\sigma_{доп}$.

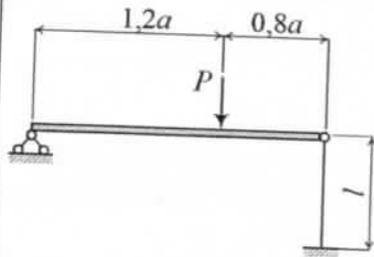
4. Вычислить допускаемую нагрузку $P_{доп}$ для конструкции.

Алфавит	Тип сечения	Уголок равнополочный	Уголок неравнополочный	Швеллер	Двутавр	B, мм	C, мм	a, м	l, м
	1								
a б в	1	40 × 40 × 5	63 × 40 × 5	12	18	150	130	2,8	3,6
г д е ё	2	45 × 45 × 4	75 × 50 × 6	14а	16	160	125	3,0	3,4
ж з и й	3	50 × 50 × 3	65 × 50 × 8	16	14	170	120	3,2	3,2
к л м	4	45 × 45 × 6	80 × 60 × 6	10	12	180	115	3,4	3,0
н о п	5	50 × 50 × 5	90 × 56 × 6	16	10	190	110	3,6	2,8
р с т	6	56 × 56 × 4	63 × 40 × 8	8	18	195	105	3,8	4,6
у ф х	7	60 × 60 × 4	80 × 60 × 8	14а	16	200	100	4,0	4,4
ц ч ш щ	8	63 × 63 × 6	90 × 56 × 8	16а	14	210	95	4,2	4,2
ъ ы ь	9	50 × 50 × 8	70 × 45 × 5	18	12	220	90	4,4	4,0
э ю я	10	60 × 60 × 10	80 × 50 × 5	14	10	230	85	4,6	3,8

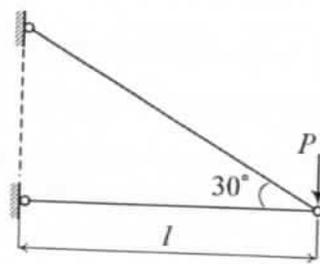


Варианты расчетных схем

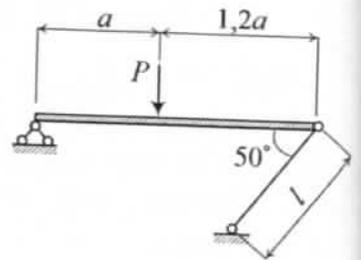
1, 16



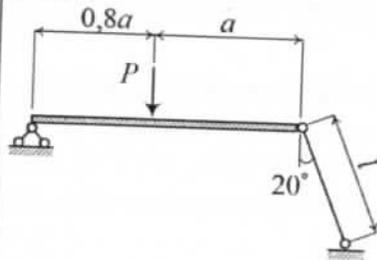
2, 17



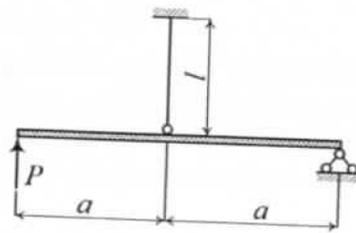
3, 18



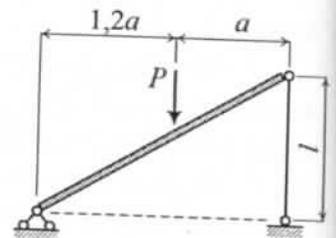
4, 19



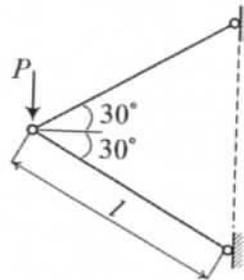
5, 20



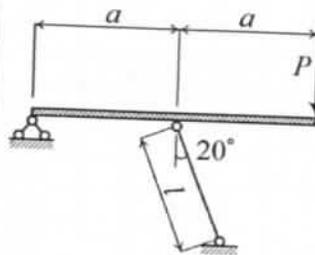
6, 21



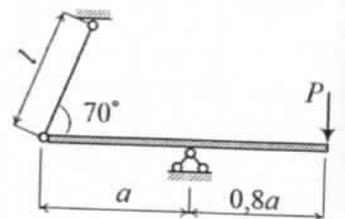
7, 22



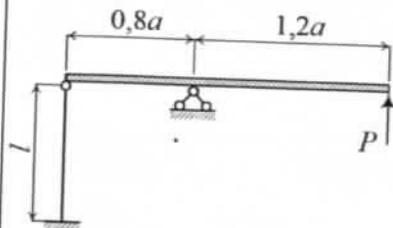
8, 23



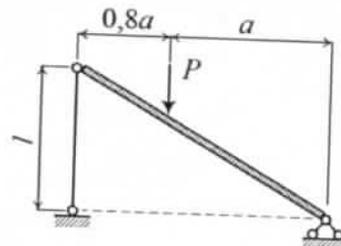
9, 24



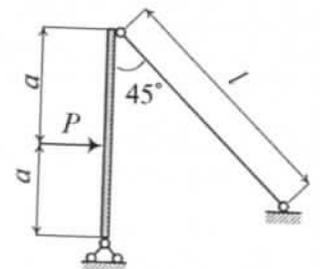
10, 25



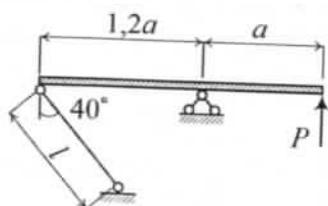
11, 26



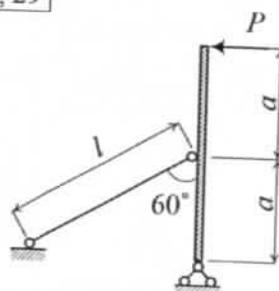
12, 27



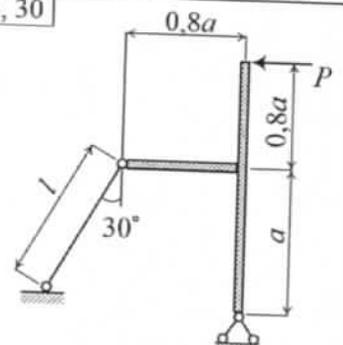
13, 28



14, 29



15, 30



Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По имени и фамилии (например, Л. Егоров) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу. Вариант расчетной схемы выбираем в соответствии с учебным шифром студента.

Л.	Е	г	о	р	о	в	Л.	Е
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Тип сечения	Уголок равнополочный	Уголок неравнополочный	Швеллер	Двутавр	B , мм	C , мм	a , м	l , м
4	—	—	16	18	—	—	3,4	3,4

Изобразим расчетную схему конструкции и поперечное сечение сжатого стержня (рис. 29).

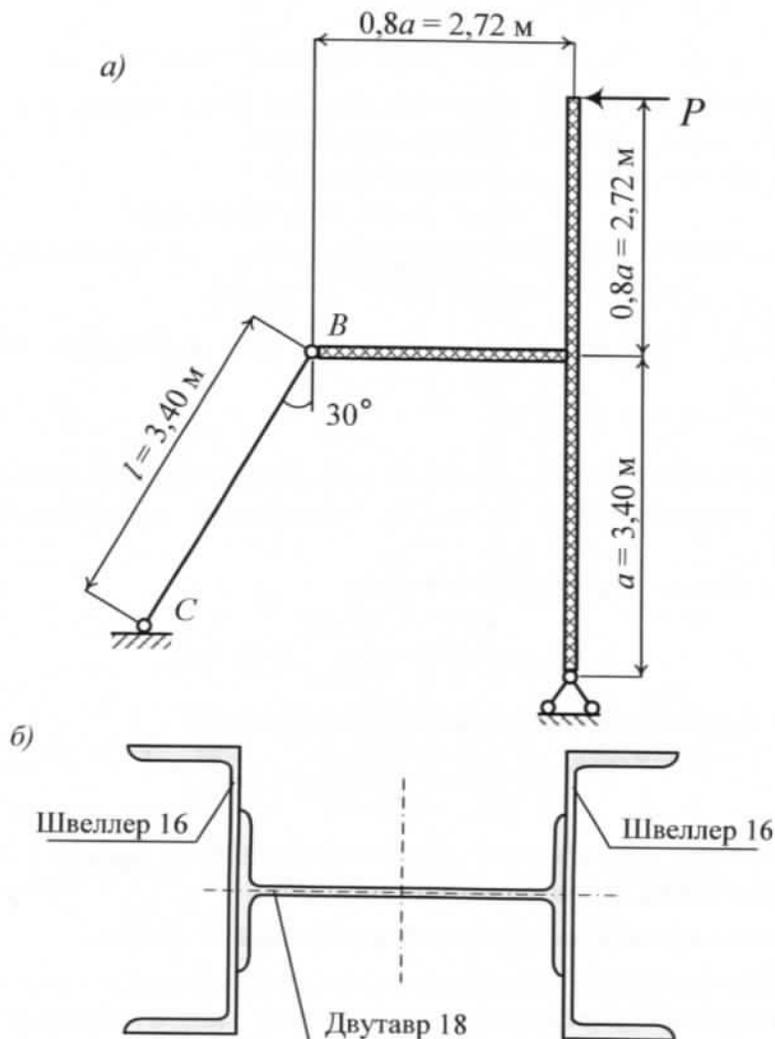


Рис. 29. Расчетная схема (а) и поперечное сечение (б) конструкции

2. Расчет геометрических характеристик поперечного сечения

Определим геометрические характеристики поперечного сечения стержня. Изобразим заданное сечение, соблюдая масштаб, и покажем основные размеры (рис. 30).

Из табл. А3, А4 выберем нужные для расчета данные.

Для швеллера № 16: $A_1 = 18,1 \text{ см}^2$; $J_z^{(1)} = 750 \text{ см}^4$; $J_{y_1}^{(1)} = 72,8 \text{ см}^4$; $z_0 = 2,04 \text{ см}$.

Для двутавра № 18: $A_2 = 23,4 \text{ см}^2$; $J_z^{(2)} = 82,6 \text{ см}^4$; $J_{y_1}^{(2)} = 1290 \text{ см}^4$; $h = 18 \text{ см}$.

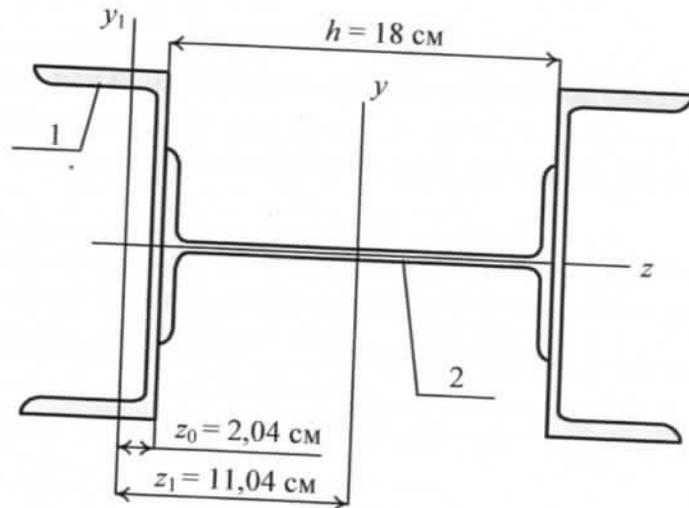


Рис. 30. Поперечное сечение сжатого стержня

При выборе значений осевых моментов инерции было учтено, что двутавр повернут на 90° относительно положения в таблице сортамента.

Определим общую площадь составного сечения

$$A = 2A_1 + A_2 = 2 \cdot 18,1 + 23,4 = 59,6 \text{ см}^2.$$

Определим моменты инерции относительно главных центральных осей z и y :

$$J_z = 2J_z^{(1)} + J_z^{(2)} = 2 \cdot 750 + 82,6 = 1580 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 2(J_{y_1}^{(1)} + z_1^2 A_1) + J_y^{(2)} = 2(72,8 + 11,04^2 \cdot 18,1) + 1290 = 5850 \text{ см}^4,$$

где $z_1 = \frac{h}{2} + z_0 = \frac{18}{2} + 2,04 = 11,04 \text{ см}.$

Потеря устойчивости сжатого стержня произойдет относительно оси с минимальным моментом инерции, т.е. в плоскости наименьшей жесткости. В нашем случае $J_{\min} = J_z = 1580 \text{ см}^4.$

Определим минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{1580}{59,6}} = 5,15 \text{ см}.$$

По формуле (19.5) [3] вычислим гибкость стержня BC

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 3,4}{5,15 \cdot 10^{-2}} = 66,0,$$

где μ – коэффициент, учитывающий условия закрепления концов стержня (шарнир – шарнир), $\mu = 1$; l – длина сжатого стержня.

3. Определение критических усилий на сжатый стержень

Так как гибкость стержня меньше предельного значения ($\lambda = 66,0 < 100$), то критическое напряжение и критическую продольную силу найдем по формуле Ясинского:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 66,0 = 235 \text{ МПа},$$

$$N_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A = 235 \cdot 10^6 \cdot 59,6 \cdot 10^{-4} = 1400 \text{ кН}.$$

4. Определение допускаемых усилий в сжатом стержне

Допускаемые напряжения и продольную силу определим из условия устойчивости сжатого стержня – формулы (19.10) [3]:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{|N|}{A} \leq R_y \varphi.$$

Коэффициент продольного изгиба φ зависит от гибкости стержня (см. прил. Б). По формуле линейной интерполяции вычислим

$$\varphi(66) = \varphi(60) + \frac{\varphi(70) - \varphi(60)}{70 - 60} (66 - 60) = 0,86 + \frac{0,81 - 0,86}{70 - 60} 6 = 0,83.$$

Определим допускаемое напряжение в сжатом стержне

$$\sigma_{\text{доп}} = R_y \varphi = 200 \cdot 0,830 = 166 \text{ МПа.}$$

Получим допускаемую продольную силу сжатия в стержне

$$N_{\text{доп}} = \sigma_{\text{доп}} A = 166 \cdot 10^6 \cdot 59,6 \cdot 10^{-4} = 989 \cdot 10^3 \text{ Н} = 989 \text{ кН.}$$

Для определения допускаемых нагрузок на заданную конструкцию рассмотрим ее равновесие (рис. 31).

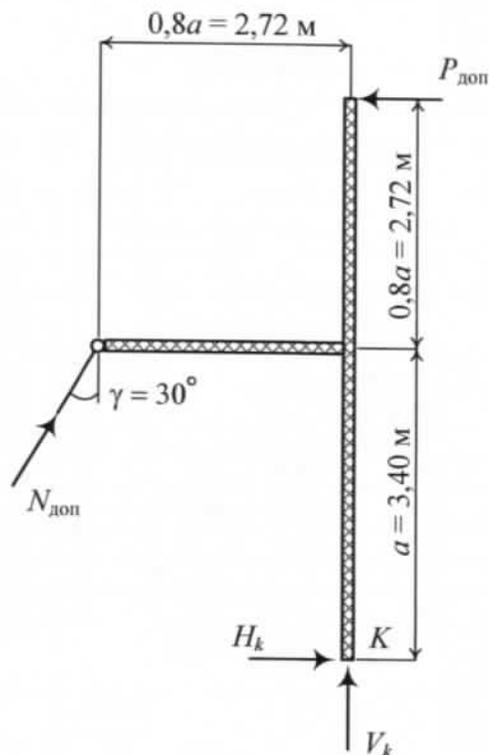


Рис. 31. Схема действия сил

$$\sum m_K = -N_{\text{доп}} \sin \gamma \cdot a - N_{\text{доп}} \cos \gamma \cdot 0,8a + P_{\text{доп}} (0,8a + a) = 0.$$

Откуда допускаемая сила

$$P_{\text{доп}} = \frac{N_{\text{доп}} (\sin \gamma \cdot a + \cos \gamma \cdot 0,8a)}{0,8a + a} = \frac{989(0,5 \cdot 3,4 + 0,866 \cdot 2,72)}{2,72 + 3,40} = 655 \text{ кН.}$$

7. Динамическое действие нагрузок

Задача 12. Расчет упругой системы с учетом сил инерции

В учебнике [1] – § 12.1–12.2, в пособии [3] – тема 21.

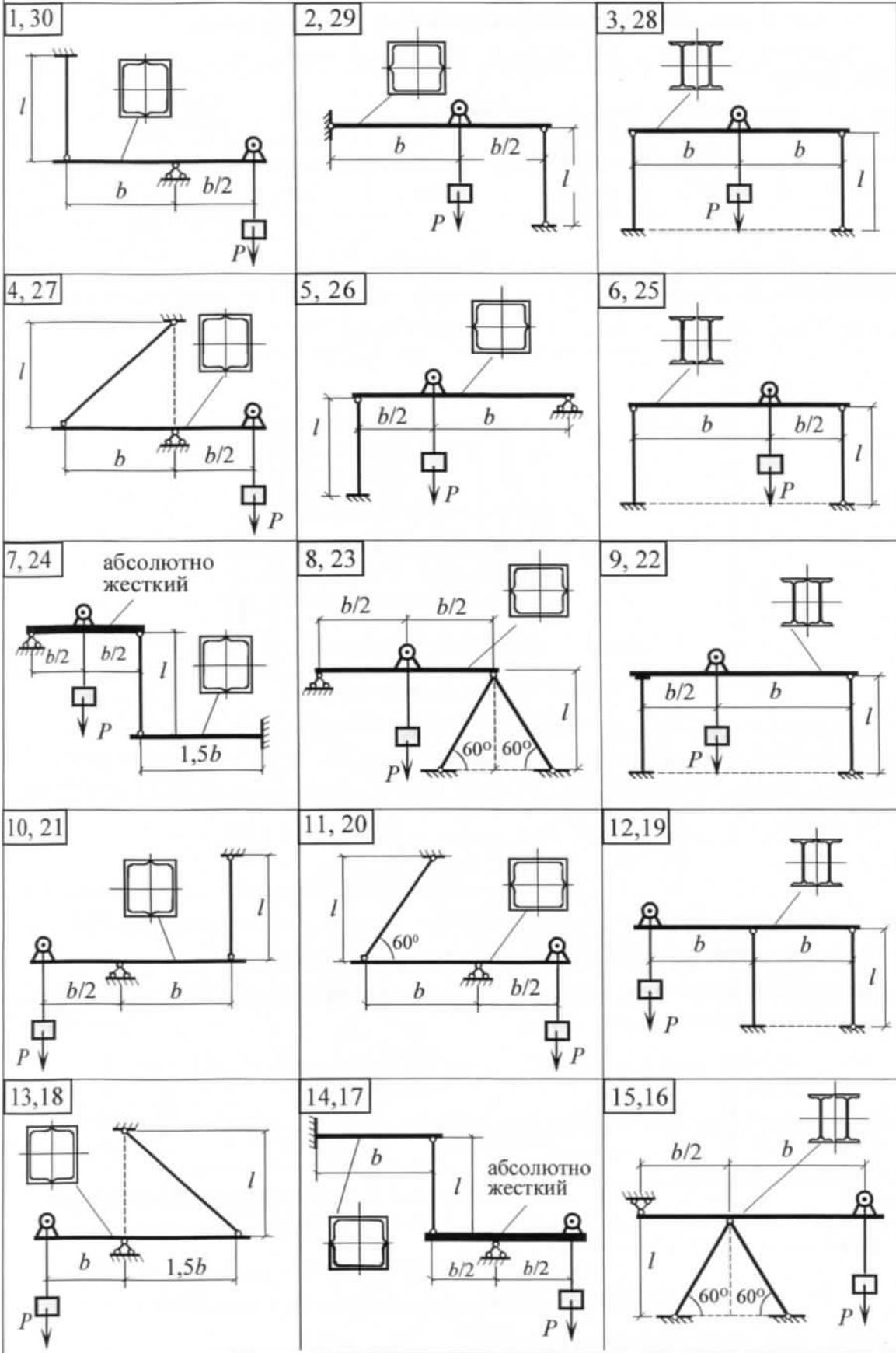
Условие. На стальной конструкции установлена лебедка, с помощью которой груз весом P поднимается с ускорением a . Стержни, работающие на растяжение-сжатие, имеют круглое поперечное сечение диаметром d . Балки изготовлены из прокатных профилей (швеллеров или двутавров).

Требуется:

1. Определить динамический коэффициент.
2. Проверить прочность балки, если расчетное сопротивление $R_y = 250$ МПа.
3. Проверить устойчивость сжатых стержней ($R_y = 160$ МПа).

Алфавит	P , кН	a , м/с ²	l , м	d , см	b , м	Номер швеллера	Номер двутавра
	1	2	3	4	5		
<i>а б в</i>	20	5	1,0	6	0,5	18	30а
<i>г д е ё</i>	25	6	1,1	7	0,6	18а	30
<i>ж з и й</i>	30	7	1,2	8	0,8	20	27а
<i>к л м</i>	35	8	1,3	9	1,0	20а	27
<i>н о п</i>	40	9	1,4	10	1,2	22	24а
<i>р с т</i>	20	10	1,5	6	0,5	22а	22а
<i>у ф х</i>	25	11	1,6	7	0,6	24	22
<i>ц ч ш щ</i>	30	12	1,7	8	0,8	24а	20а
<i>ъ ы ь</i>	35	13	1,8	9	1,0	27	20
<i>э ю я</i>	40	14	2,0	10	1,2	30	18

Варианты расчетных схем



ой груз
сжатие,
катных

Номер
дуга
7
30а
30
27а
27
24а
22а
22
20а
20
18

Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По имени и фамилии (например, С. Ивлев) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу.

С.	И	В	Л	Е	В	С.
1	2	3	4	5	6	7
$P, \text{кН}$	$a, \text{м/с}^2$	$l, \text{м}$	$d, \text{см}$	$b, \text{м}$	Номер швеллера	Номер двутавра
20	7	1,0	9	0,6	18	—

По учебному шифру выбираем расчетную схему (рис. 32). Вынесем на нее числовые значения размеров и нагрузок из таблицы.



Рис. 32. Расчетная схема

2. Определение динамического коэффициента

При движении массивных тел с ускорением динамический коэффициент определяют по формуле

$$k_d = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{7}{9,81} = 1,71,$$

где a – заданное ускорение движения груза; g – ускорение свободного падения.

3. Определение внутренних усилий в элементах системы

Выделим абсолютно жесткую балку CB и рассмотрим ее равновесие. Отброшенные связи заменим реакциями (рис. 33, а).

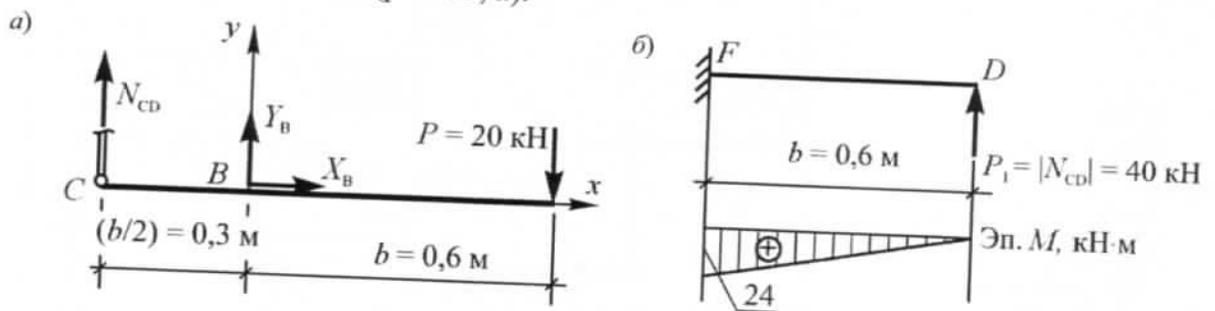


Рис. 33. Система сил, действующая на балку CB (а) и балку DF (б)

Определим продольную силу N_{CD} :

$$\sum M_B = -N_{CD} \cdot 0,3 - P \cdot 0,6 = 0,$$

откуда

$$N_{CD} = -P \frac{0,6}{0,3} = -2P = -2 \cdot 20 = -40 \text{ кН.}$$

Знак «минус» указывает на то, что стержень CD сжимается, а следовательно, может потерять устойчивость.

Со стороны стержня CD на балку DF снизу вверх будет действовать сила $P_1 = |N_{CD}| = 40$ кН, как показано на рис. 33, б. От этой нагрузки построим эпюру изгибающих моментов.

$$0 \leq x \leq 0,6 \text{ м; } M = P_1 x.$$

$$\text{При } x = 0 \quad M = 0; \quad \text{при } x = 0,6 \text{ м} \quad M = 24 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

4. Проверка балки на прочность

Определяем геометрические характеристики поперечного сечения балки, составленного из двух швеллеров № 18 (рис. 34).

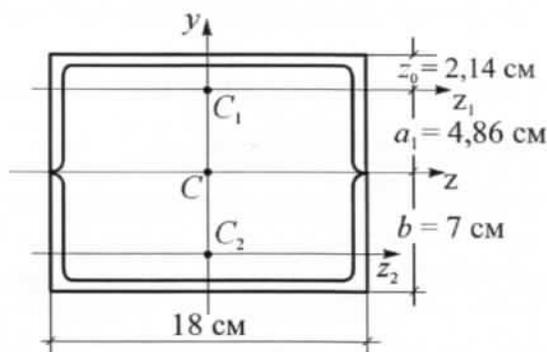


Рис. 34. Поперечное сечение балки DF

Выпишем из табл. А3 геометрические характеристики швеллера № 18: ширина полки $b = 7$ см; площадь $A = 20,7$ см²; моменты инерции $J_z = 1\,090$ см⁴, $J_y = 100$ см⁴; координата центра тяжести $z_0 = 2,14$ см. По формулам (9.7) [2] определим момент инерции

$$J_z = \sum (J_{z_i} + a_i^2 A) = 2 [100 + (7 - 2,14)^2 \cdot 20,7] = 1180 \text{ см}^4.$$

Вычислим момент сопротивления сечения

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{1180}{7} = 168 \text{ см}^3.$$

Определим максимальное напряжение в балке DF при статическом нагружении конструкции:

$$\sigma_{\max}^{\text{ст}} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{24 \cdot 10^3}{168 \cdot 10^{-6}} = 143 \cdot 10^6 \text{ Па} = 143 \text{ МПа.}$$

Максимальное динамическое напряжение в балке вычислим по следующей формуле:

$$\sigma_{\max}^{\text{дин}} = k_d \sigma_{\max}^{\text{ст}} = 1,71 \cdot 143 = 244 \text{ МПа.}$$

Балка удовлетворяет условию прочности, так как

$$\sigma_{\max}^{\text{дин}} = 244 \text{ МПа} < R_y = 250 \text{ МПа.}$$

5. Проверка сжатого стержня CD на устойчивость

Вычисляем гибкость стержня CD по формуле (19.5) [3]:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 100}{2,25} = 45,$$

где μ – коэффициент приведения длины (рис. 19.3 в пособии [3]); l – длина стержня; i_{\min} – минимальный радиус инерции сечения, который определим по формуле (9.12) [2]:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 \cdot 4}{64\pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ см.}$$

Условие устойчивости сжатого стержня при динамическом действии нагрузки запишем следующим образом:

$$\sigma^{\text{дин}} \leq R_y \varphi,$$

где φ – коэффициент продольного изгиба, который определим, используя линейную интерполяцию:

$$\text{при } \lambda = 50 \quad \varphi(50) = 0,89;$$

$$\text{при } \lambda = 40 \quad \varphi(40) = 0,92 \text{ (см. прил. Б);}$$

$$\text{при } \lambda = 45 \quad \varphi(45) = \varphi(40) - \frac{\varphi(40) - \varphi(50)}{10} (45 - 40) = 0,92 - \frac{0,03}{10} 5 = 0,905.$$

Определив площадь поперечного сечения стержня

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 9^2}{4} = 63,6 \text{ см}^2,$$

получим значение статических напряжений в стержне

$$\sigma^{\text{ст}} = \frac{|N|}{A} = \frac{40 \cdot 10^3}{63,6 \cdot 10^{-4}} = 6,29 \cdot 10^6 \text{ Па} = 6,29 \text{ МПа.}$$

Условие устойчивости выполняется, так как динамические напряжения, действующие в сжатом стержне,

$$\sigma^{\text{дин}} = k_d \cdot \sigma^{\text{ст}} = 1,71 \cdot 6,29 = 10,8 \text{ МПа} \leq \sigma_{\text{доп.}}$$

Допускаемое напряжение рассчитывается как

$$\sigma_{\text{доп}} = R_y \varphi = 160 \cdot 0,905 = 145 \text{ МПа.}$$

Задача 13. Расчет конструкции на прочность при вынужденных колебаниях

В учебнике [1] – § 12.4, в пособии [3] – тема 21, § 21.2.

Условие. На балке установлен электродвигатель весом Q . Число оборотов ротора двигателя n . Из-за вращения неуравновешенной массы ротора возникает центробежная сила $P_0 = 0,2Q$. Сечение балки составлено из двух прокатных профилей – швеллеров или двутавров. Подвески, выполненные из стали, имеют круглое поперечное сечение диаметром d .

При расчете массу конструкции и силы сопротивления среды не учитывать, принять модуль материала стержня и балки $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

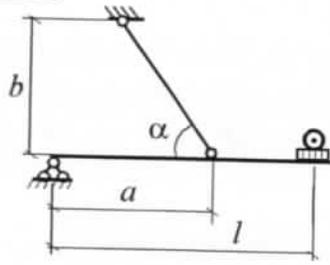
Требуется:

1. Определить опорные реакции и построить эпюру изгибающих моментов в балке.
2. Определить круговую частоту вынужденных колебаний балки θ .
3. Из условия, что частота собственных колебаний $\omega = 1,3\theta$, определить размеры сечения балки.
4. Определить динамический коэффициент и максимальные напряжения в балке.

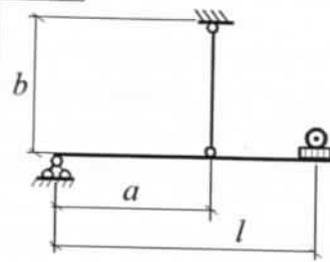
Алфавит	l , м	a , м	b , м	d , см	Q , кН	n , об/мин	α , град
	1	2	3	4	5	6	7
<i>a б в</i>	3,0	0,4 <i>l</i>	1,5	2,0	4	800	30
<i>г д е ё</i>	3,2	0,5 <i>l</i>	1,6	2,5	5	900	35
<i>ж з и й</i>	3,4	0,6 <i>l</i>	1,8	3,0	6	1000	40
<i>к л м</i>	3,6	0,7 <i>l</i>	2,0	3,5	7	1100	45
<i>н о п</i>	3,8	0,75 <i>l</i>	2,2	4,0	8	1200	55
<i>р с т</i>	4,0	0,25 <i>l</i>	2,4	4,5	7	1250	60
<i>у ф х</i>	4,2	0,45 <i>l</i>	2,6	5,0	6	1150	65
<i>ц ч ш щ</i>	4,4	0,55 <i>l</i>	2,8	4,0	5	1050	70
<i>ъ ы ь</i>	4,6	0,65 <i>l</i>	3,0	3,0	4	950	50
<i>э ю я</i>	4,8	0,3 <i>l</i>	3,2	2,0	3	850	40

Варианты расчетных схем

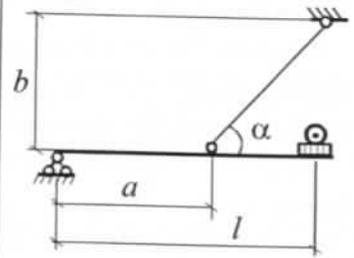
1, 30



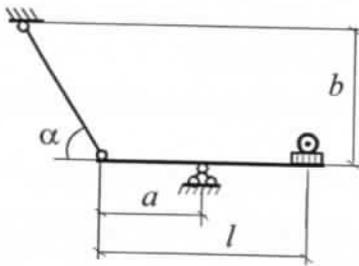
2, 29



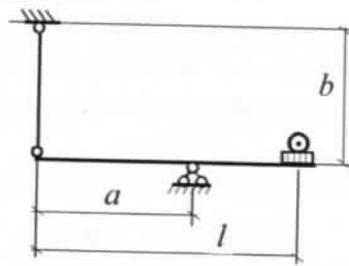
3, 28



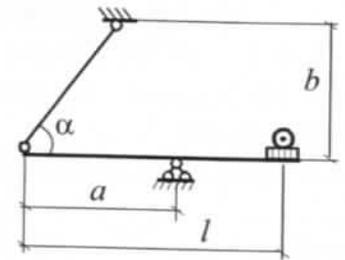
4, 27



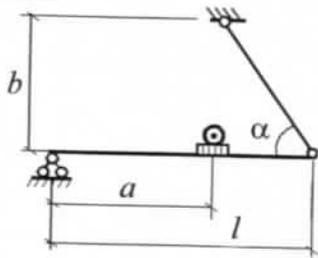
5, 26



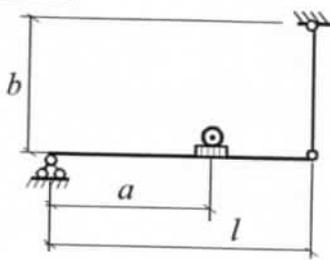
6, 25



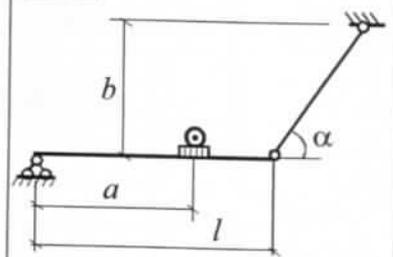
7, 24



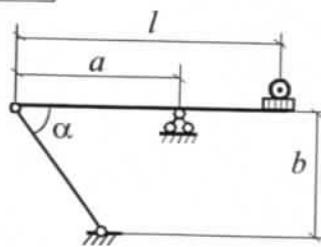
8, 23



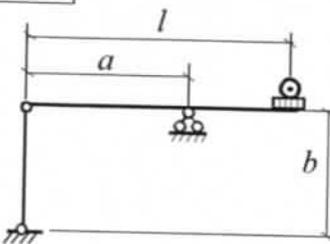
9, 22



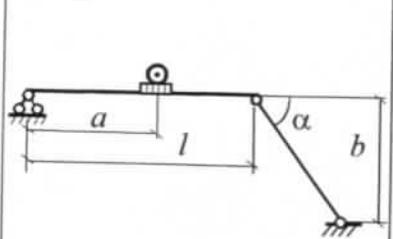
10, 21



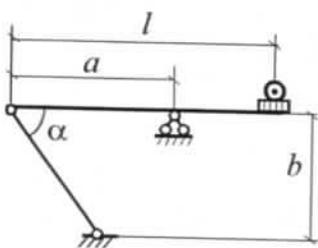
11, 20



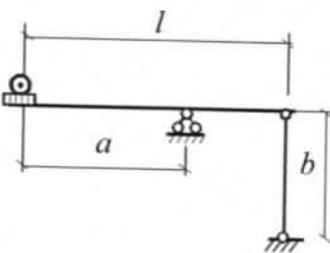
12, 19



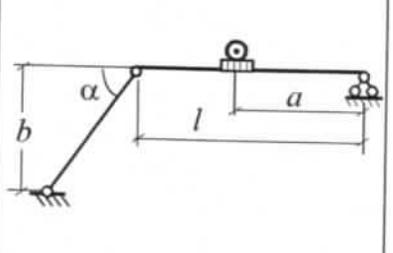
13, 18



14, 17



15, 16



Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По имени и фамилии (например, С. Ивлев) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу. В соответствии с учебным шифром выбираем расчетную схему.

С.	И	в	л	е	в	С.
1	2	3	4	5	6	7
l , м	a , м	b , м	d , см	Q , кН	n , об/мин	α , град
4,0	$0,6l$	1,5	3,5	5	800	60

Изобразим расчетную схему и нанесем числовые значения размеров и угла наклона (рис. 35).

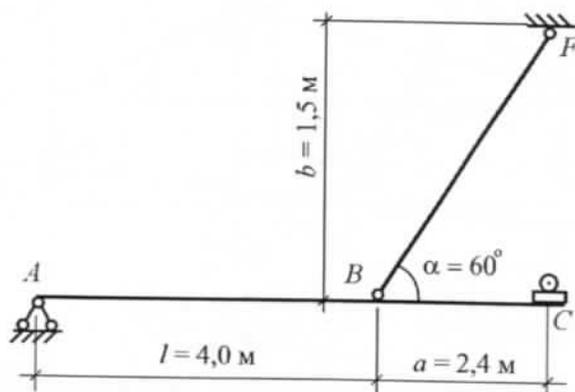


Рис. 35. Расчетная схема балки, работающей на колебание

2. Определение частот вынужденных и собственных колебаний конструкции

Частоту вынужденных колебаний определяем по формуле (21.19) [3]:

$$\theta = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 800}{30} = 83,7 \text{ с}^{-1}.$$

Частоту свободных колебаний найдем из условия задачи:

$$\omega = 1,3\theta = 1,3 \cdot 83,7 = 109 \text{ с}^{-1}.$$

3. Статический расчет конструкции

В точке C приложим силу Q , равную весу электродвигателя. На рис. 36 показан деформированный вид системы. Под действием силы Q точка C переместится в положение C_2 на величину $\Delta_{\text{ст}}$. Величина статического перемещения точки C складывается из двух перемещений: $\Delta_{\text{ст}} = \Delta_1 + \Delta_2$, где Δ_1 – перемещение точки C от изгиба балки; Δ_2 – перемещение от поворота балки.

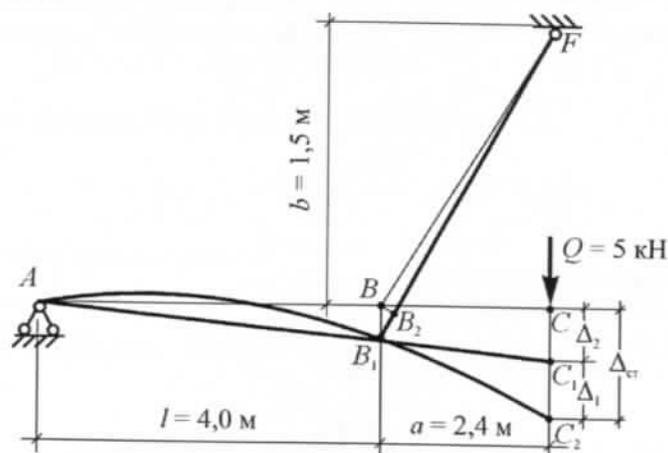


Рис. 36. Деформированный вид системы

Рассмотрим балку AC , которая имеет шарнирное опирание в точках A и B (рис. 37, a). От действия силы $Q = 5$ кН она испытывает деформацию изгиба. На рис. 37, b представлена эпюра изгибающих моментов M , действующих в поперечных сечениях балки.

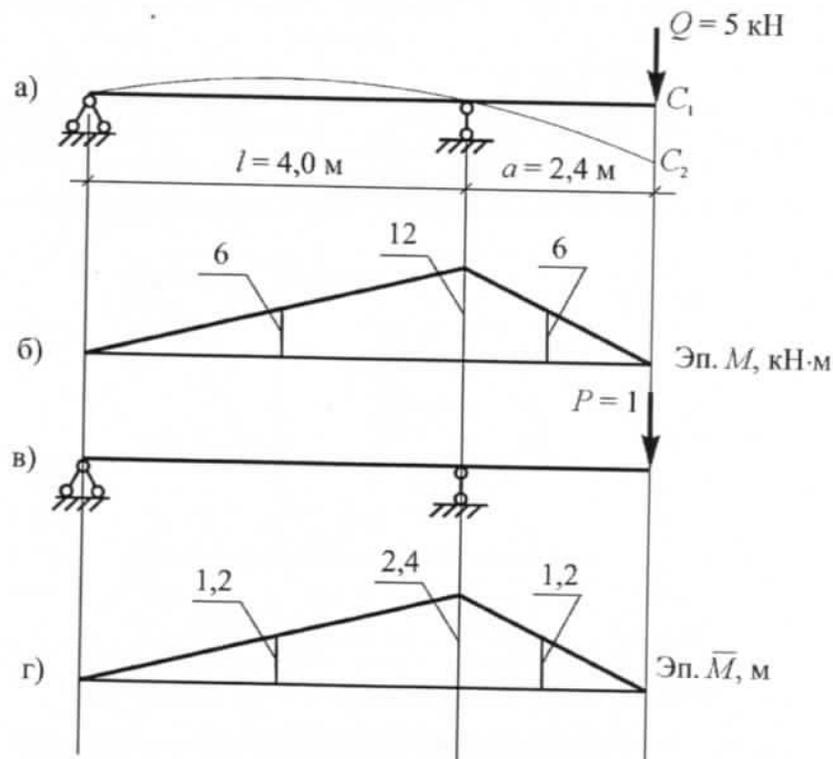


Рис. 37. Расчетная схема (a), грузовая эпюра (b) и эпюра (c) от единичного нагружения (e) балки

Прогиб Δ_1 определим методом Максвелла – Мора (тема 13 в пособии [3]). Для этого в точку C приложим единичную силу $i = 1$ (см. рис. 37, e) и построим эпюру единичных моментов \bar{M} (см. рис. 37, c). Используя формулу Симпсона (13.3) [3], получим

$$\Delta_1 = C_1 C_2 = [M \times \bar{M}] = \frac{4 \cdot 10^3}{6EJ} [4 \cdot 6 \cdot 1,2 + 12 \cdot 2,4] + \frac{2,4 \cdot 10^3}{6EJ} [4 \cdot 6 \cdot 1,2 + 12 \cdot 2,4] = \frac{61,44 \cdot 10^3}{EJ}.$$

От действия продольной силы $N = 9,24$ кН стержень BF будет испытывать растяжение. При этом балка AC повернется (см. рис. 36). В результате точка C переместится в положение C_1 на величину Δ_2 . Для определения этого перемещения рассмотрим деформацию конструкции в предположении, что балка не деформируется (рис. 38).

Из уравнения равновесия балки AC (рис. 39) определим усилие N , действующее на стержень BF :

$$\sum M_A = N \sin \alpha \cdot 4 - Q \cdot 6,4 = 0,$$

откуда получим

$$N = \frac{6,4Q}{4 \cdot \sin \alpha} = \frac{6,4 \cdot 5}{4 \cdot \sin 60^\circ} = 9,24 \text{ кН.}$$

Удлинение стержня определяется по формуле

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{9,24 \cdot 10^3 \cdot 1,73}{2 \cdot 10^{11} \cdot 9,61 \cdot 10^{-4}} = 8,32 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,0832 \text{ мм,}$$

где l – длина стержня, $l = \frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{1,5}{\sin 60^\circ} = 1,73$ м; A – площадь поперечного сечения стержня, $A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 3,5^2}{4} = 9,61$ см².

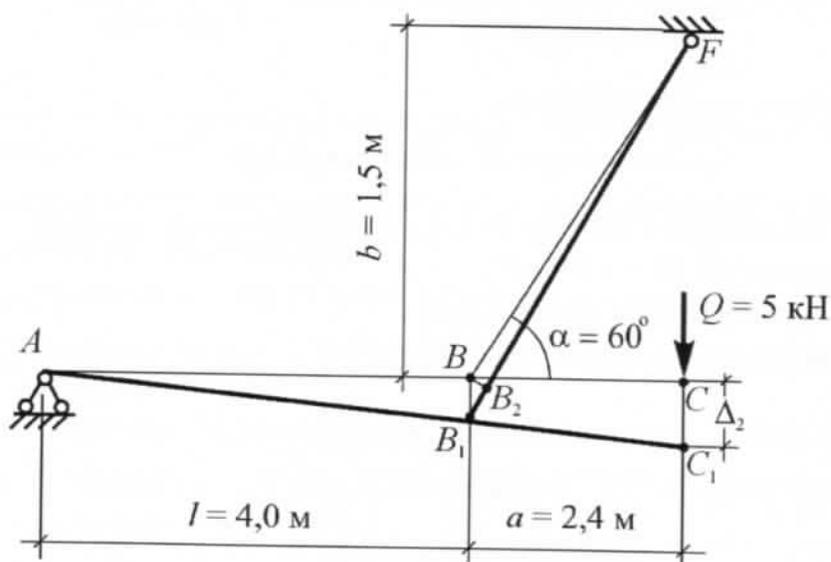


Рис. 38. Деформированный вид конструкции при повороте балки

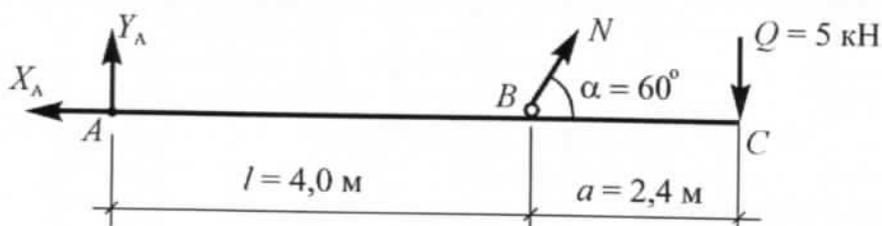


Рис. 39. Система сил, действующих на балку AC

На рис. 38 удлинение стержня соответствует отрезку B_1B_2 . В треугольнике BB_1B_2 угол B равен 60° . С учетом этого перемещение точки B составит:

$$BB_1 = \frac{B_1B_2}{\sin 60^\circ} = \frac{0,0832}{0,866} = 0,0961 \text{ мм.}$$

Рассматривая теперь подобные треугольники ABB_1 и ACC_1 , находим из пропорции искомое перемещение

$$\Delta_2 = CC_1 = BB_1 \frac{6,4}{4} = 0,0961 \cdot \frac{6,4}{4} = 0,154 \text{ мм.}$$

Таким образом, статическое перемещение точки C

$$\Delta_{ст} = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{61,44 \cdot 10^3}{EJ} + 0,154 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

4. Определение номера двугавра

Частота собственных колебаний системы с одной степенью свободы определяется по формуле (21.17) [3]:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}}. \quad (14)$$

Выразим статическое перемещение

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9,81}{109^2} = \frac{61,44 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} J_z} + 0,154 \cdot 10^{-3}.$$

Из этого уравнения определим требуемое значение момента инерции сечения

$$J_z = \frac{61,44 \cdot 10^3}{\left(\frac{9,81}{109^2} - 0,154 \cdot 10^{-3}\right) 2 \cdot 10^{11}} = 4,57 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4 = 45\,700 \text{ см}^4.$$

Момент инерции одного двутавра

$$J_z = \frac{45\,700}{2} = 22\,850 \text{ см}^4.$$

По табл. А4 выбираем двутавр № 45, у которого момент инерции $J_z = 27\,696 \text{ см}^4$, момент сопротивления $W_z = 1\,231 \text{ см}^3$.

5. Расчет динамических напряжений

Максимальное динамическое напряжение, действующее в балке, определяется по формуле

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{дин}} = k_d \sigma_{\text{max}}^{\text{ст}}, \quad (15)$$

а динамический коэффициент – по формуле (21.29) [3]:

$$k_d = 1 + \frac{P_0}{Q} \beta, \quad (16)$$

где P_0 – амплитудное значение вынуждающей силы; Q – вес колеблющегося груза; β – коэффициент нарастания амплитуды вынужденных колебаний, который определяется по формуле (21.26) [3]:

$$\beta = \frac{1}{\left|1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right|} = \frac{1}{\left|1 - \frac{83,7^2}{109^2}\right|} = 2,44.$$

Из формулы (16) получим

$$k_d = 1 + \frac{0,2Q}{Q} 2,44 = 1,49.$$

Максимальное статическое напряжение в балке определим по формуле

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{ст}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_z} = \frac{12 \cdot 10^3}{2 \cdot 1\,231 \cdot 10^{-6}} = 4,87 \cdot 10^6 \text{ Па} = 4,87 \text{ МПа}.$$

По формуле (15) определим максимальное динамическое напряжение

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{дин}} = 1,49 \cdot 4,87 = 7,26 \text{ МПа}.$$

Задача 14. Расчет упругой системы на ударную нагрузку

В учебнике [1] – § 12.3, в пособии [3] – тема 21, § 21.3.

Условие. На двутавровую балку падает груз весом P .

При расчетах массы балки и подвесок не учитывать; модуль упругости материала балки принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Требуется:

1. Построить эпюру изгибающих моментов при статическом приложении силы P и вычислить наибольшие значения нормальных напряжений в балке.

2. Вычислить динамический коэффициент k_d и напряжения $\sigma^{\text{дин}}$ в балке при динамическом воздействии – падении груза.

3. Определить динамический прогиб $v^{\text{дин}}$ в точке B и угол поворота $\theta^{\text{дин}}$ сечения C .

4. Вычислить динамический коэффициент k_d после установки пружины с коэффициентом податливости α .

5. Оценить влияние пружины на величину динамического коэффициента.

Алфавит	Номер двутавра	a , м	b , м	H , см	P , кН	α , мм/кН
	1	2	3	4	5	6
<i>а б в</i>	16	2,0	3,5	8	1,0	1,4
<i>г д е ё</i>	18	2,4	3,3	10	1,2	1,2
<i>ж з и й</i>	20	2,8	3,1	18	1,4	1,4
<i>к л м</i>	22	3,0	3,0	14	1,6	1,6
<i>н о п</i>	24	3,2	2,8	16	2,0	1,0
<i>р с т</i>	27	3,5	2,6	12	1,8	2,0
<i>у ф х</i>	30	3,3	2,5	16	1,9	1,9
<i>ц ч ш щ</i>	27а	3,1	2,4	14	1,7	1,7
<i>ъ ы ь</i>	24а	2,9	2,2	12	1,5	1,5
<i>э ю я</i>	22а	2,7	2,0	10	1,3	1,3

Варианты расчетных схем

1, 30	2, 29	3, 28
4, 27	5, 26	6, 25
7, 24	8, 23	9, 22
10, 21	11, 20	12, 21
13, 18	14, 17	15, 16

Пример решения

1. Выбор исходных данных и изображение расчетной схемы

По имени и фамилии (например, Н. Смирнов) выбираем данные к расчету и заносим их в таблицу. По учебному шифру выбираем вариант расчетной схемы.

Н.	С	м	и	р	н	о	в
1	2	3	4	5	6		
Номер двутавра	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$H, \text{ см}$	$P, \text{ кН}$	$\alpha, \text{ мм/кН}$		
24	3,5	3,0	18	1,8	1,0		

Изобразим расчетную схему с указанием числовых значений исходных данных (рис. 40, а).

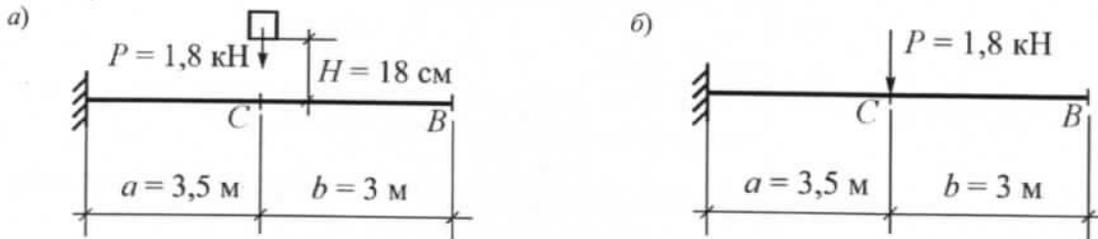


Рис. 40. Заданная схема (а) и расчетная схема балки при статическом нагружении (б)

Динамические напряжения $\sigma^{\text{дин}}$ и перемещения $\delta^{\text{дин}}$ определяются по следующим формулам:

$$\sigma^{\text{дин}} = k_d \sigma^{\text{ст}}, \quad (17)$$

$$\delta^{\text{дин}} = k_d \delta^{\text{ст}}, \quad (18)$$

где $\sigma^{\text{ст}}$ и $\delta^{\text{ст}}$ – напряжения и перемещения при статическом действии нагрузки соответственно; k_d – динамический коэффициент.

Таким образом, задача распадается на две части: статический и динамический расчет. При статическом расчете определяются все искомые величины, если конструкция статически нагружена весом падающего тела. При динамическом расчете определяются динамический коэффициент и искомые динамические величины.

2. Статический расчет

Рассмотрим балку, на которую в точку C статически приложена сила, равная весу груза P (см. рис. 40, б). Под действием этой нагрузки балка будет испытывать плоский изгиб.

Определим максимальные статические напряжения в балке и статические перемещения сечений B и C . Для этого построим эпюру изгибающих моментов M_p (рис. 41, б).

Максимальное статическое напряжение в балке определим по формуле

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{ст}} = \frac{|M_p|_{\text{max}}}{W_z} = \frac{6,3 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} = 21,8 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

где $W_z = 289 \text{ см}^3$ – момент сопротивления двутавра № 24 (см. табл. А4).

Перемещения сечений $\theta_C^{\text{ст}}$ и $v_D^{\text{ст}}$ (см. рис. 41, а) определим методом единичных нагрузок. Для расчета прогиба в точке B уберем с балки внешнюю нагрузку и приложим в эту точку единичную силу $P = 1$ (см. рис. 41, в). От действия этой нагрузки построим эпюру единичных моментов \bar{M}_1 (см. рис. 41, з).

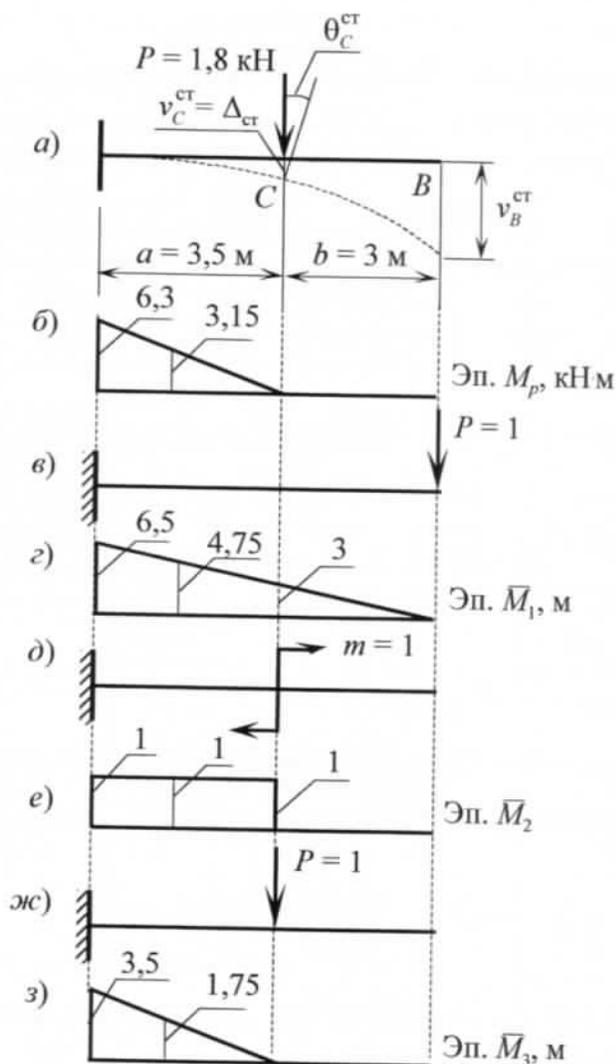


Рис. 41. Грузовая и единичные эпюры

По формуле Симпсона получим

$$v_B^{\text{ст}} = [M_p \times \bar{M}_1] = \frac{3,5}{6EJ_z} (6,3 \cdot 6,5 + 4 \cdot 3,15 \cdot 4,75 + 3 \cdot 0) = \frac{353 \cdot 10^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3 \cdot 460 \cdot 10^{-8}} = 8,50 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 8,5 \text{ мм.}$$

Для расчета использовано значение момента инерции двутавровой балки № 24 $J_z = 3 \cdot 460 \text{ см}^4$ (см. табл. А4).

Для определения угла поворота сечения C балку нагружаем в этом сечении единичным моментом $m = 1$ (см. рис. 41, д), от действия которого строим эпюру \bar{M}_2 . Перемножив эпюры M_p и \bar{M}_2 , получим

$$\theta_C^{\text{ст}} = [M_p \times \bar{M}_2] = \frac{3,5}{6EJ_z} (6,3 \cdot 1 + 4 \cdot 3,15 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = \frac{66,15 \cdot 10^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3 \cdot 460 \cdot 10^{-8}} = 1,59 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

3. Динамический расчет

Динамический коэффициент определяем по формуле (21.38) [3]:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{\text{ст}}}}, \quad (19)$$

где H – высота падения груза; $\Delta_{ст}$ – перемещение точки, по которой производится удар в вертикальном направлении при статическом приложении внешней нагрузки (в нашем случае это прогиб балки в точке C : $\Delta_{ст} = v_C^{ст}$, см. рис. 41, а).

Для определения этой величины на балку, лишенную внешней нагрузки, приложим единичную силу $P = 1$ (см. рис. 41, б), от действия которой построим эпюру единичных моментов (см. рис. 41, в), и произведем перемножение этой эпюры с грузовой эпюрой M_p :

$$v_C^{ст} = [M_p \times \bar{M}_3] = \frac{3,5}{6EJ_z} (6,3 \cdot 3,5 + 4 \cdot 3,15 \cdot 1,75 + 0 \cdot 0) = \frac{154 \cdot 10^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3 \cdot 460 \cdot 10^{-8}} = 3,71 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,71 \text{ мм.}$$

Тогда по формуле (19)

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{ст}}} + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,18}{3,71 \cdot 10^{-3}}} = 10,9.$$

Наибольшие динамические напряжения в балке определим по формуле (17)

$$\sigma_{\max}^{дин} = 10,9 \cdot 21,8 = 238 \text{ МПа,}$$

а динамические перемещения по следующим формулам:

$$v_B^{дин} = k_d v_B^{ст} = 10,9 \cdot 8,50 = 92,65 \text{ мм,}$$

$$\theta_C^{дин} = k_d \theta_C^{ст} = 10,9 \cdot 1,59 \cdot 10^{-3} = 17,33 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

4. Динамический расчет балки с пружиной

Для того чтобы уменьшить динамический коэффициент, а следовательно, и значения динамических напряжений и перемещений при ударе, поставим на балку в точку C упругий элемент – пружину. Податливость пружины выписываем из таблицы данных: $\alpha = 1,0$ мм/кН.

Осадка пружины λ при статическом действии силы P определяется следующим образом:

$$\lambda = \alpha P = 1,0 \cdot 1,8 = 1,8 \text{ мм.}$$

Общее перемещение точки приложения силы с учетом установки пружины

$$\Delta_{ст} = \lambda + v_C^{ст} = 1,8 + 3,71 = 5,51 \text{ мм.}$$

Динамический коэффициент определим по формуле (19)

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{ст}}} + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,18}{5,51 \cdot 10^{-3}}} = 9,14.$$

Соответственно динамические напряжения и перемещения в балке составят:

$$\sigma_{\max}^{дин} = k_d \sigma_{\max}^{ст} = 9,14 \cdot 21,8 = 199 \text{ МПа,}$$

$$v_B^{дин} = k_d v_B^{ст} = 9,14 \cdot 8,50 = 77,7 \text{ мм,}$$

$$\theta_C^{дин} = k_d \theta_C^{ст} = 9,14 \cdot 1,85 \cdot 10^{-3} = 16,9 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

5. Оценка влияния установки пружины

При установке пружины увеличивается статическое перемещение $\Delta_{ст}$, что приводит к уменьшению динамического коэффициента на $\frac{10,9 - 9,14}{10,9} 100\% = 16,1\%$.

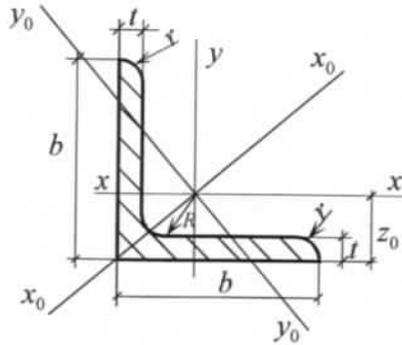
Библиографический список

1. *Ахметзянов М.Х., Грес П.В., Лазарев И.Б.* Сопротивление материалов. М.: Высш. шк., 2007. 334 с.
2. *Агуленко В.Н.* Сопротивление материалов: Учеб. пособие: В 2 ч. Ч. 1. Новосибирск: Изд-во СГУПСа, 2002. 105 с.
3. *Агуленко В.Н.* Сопротивление материалов: Учеб. пособие: В 2 ч. Ч. 2. Новосибирск: Изд-во СГУПСа, 2003. 158 с.
3. *Грес П.В.* Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2009. 135 с.
4. *Краснов Л.А.* Справочник для решения задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во СГУПСа, 2004. 117 с.
5. Сопротивление материалов: Сборник задач: В 2 ч. Ч. 1 / В.Н. Агуленко, В.П. Кутовой, Е.Б. Маслов, В.М. Тихомиров, А.П. Шабанов / Новосибирск: Изд-во СГУПСа, 2013. 84 с.

Сортамент стального проката

Таблица А1

Уголки стальные горячекатаные равнополочные (ГОСТ 8509-93)



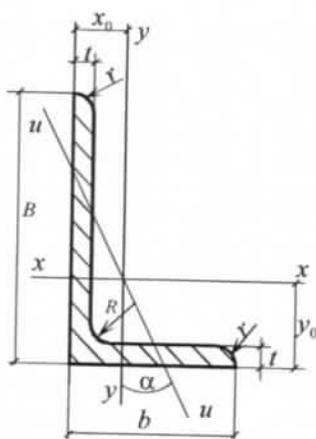
- b – ширина полки;
- t – толщина полки;
- R – радиус внутреннего закругления;
- r – радиус закругления полок;
- J – момент инерции;
- i – радиус инерции;
- z_0 – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки;
- J_{xy} – центробежный момент инерции (абсолютная величина)

Номер уголка	Размеры уголка, мм				Площадь поперечного сечения, см ²	Справочные величины для осей								Масса 1 м уголка, кг
	b	t	R	r		$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		J_{xy} , см ⁴	z_0 , см	
						J_x , см ⁴	i_x , см	$J_{x_0 \max}$, см ⁴	$i_{x_0 \max}$, см	$J_{y_0 \min}$, см ⁴	$i_{y_0 \min}$, см			
2	20	34	3,5	1,2	1,13 1,46	0,40 0,50	0,59 0,58	0,63 0,78	0,75 0,73	0,17 0,22	0,39 0,38	0,23 0,28	0,60 0,64	0,89 1,15
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	0,47	0,73	1,12
		4			1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	0,59	0,76	1,46
		5			2,27	1,22	0,73	1,91	0,92	0,53	0,48	0,69	0,80	1,78
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	0,68	0,80	1,27
3	30	3	4,0	1,3	1,74	1,45	0,91	2,30	1,15	0,60	0,59	0,85	0,85	1,36
		4			2,27	1,84	0,90	2,92	1,13	0,77	0,58	1,08	0,89	1,78
		5			2,78	2,20	0,89	3,47	1,12	0,94	0,58	1,27	0,93	2,18
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	1,03	0,89	1,46
		4			2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	1,32	0,94	1,91
3,5	35	3	4,5	1,5	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69	1,37	0,97	1,60
		4			2,67	3,01	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68	1,75	1,01	2,10
		5			3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68	2,10	1,05	2,58
4	40	3	5,0	1,7	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	2,08	1,09	1,85
		4			3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	2,68	1,3	2,42
		5			3,79	5,53	1,21	8,75	1,52	2,30	0,78	3,22	1,17	2,98
		6			4,48	6,41	1,20	10,13	1,50	2,70	0,78	3,72	1,21	3,52
4,5	45	3	5,0	1,7	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	3,00	1,21	2,08
		4			3,48	6,63	1,38	10,52	1,74	2,74	0,89	3,89	1,26	2,73
		5			4,29	8,03	1,37	12,74	1,72	3,33	0,88	4,71	1,30	3,37
		6			5,08	9,35	1,36	14,80	1,71	3,90	0,88	5,45	1,34	3,90
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1,00	4,16	1,33	2,32
		4			3,89	9,21	1,54	14,63	1,94	3,80	0,99	5,42	1,38	3,05
		5			4,80	11,20	1,53	17,77	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42	3,77
		6			5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98	7,65	1,46	4,47
		7			6,56	14,84	1,50	23,47	1,89	6,21	0,97	8,63	1,50	5,15
		8			7,41	16,51	1,49	26,03	1,87	6,98	0,97	9,52	1,53	5,82

Номер уголка	Размеры уголка, мм				Пло- щадь попе- речного сечения, см ²	Справочные величины для осей								Масса 1 м уголка, кг
	b	t	R	r		x-x		x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀		J _{xy} , см ⁴	z ₀ , см	
						J _x , см ⁴	i _x , см	J _{x₀ max} , см ⁴	i _{x₀ max} , см	J _{y₀ min} , см ⁴	i _{y₀ min} , см			
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	1,73	20,79	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52	3,44
		5			5,41	15,97	1,72	25,36	2,16	6,59	1,10	9,41	1,57	4,25
6	60	4	7,0	2,3	4,72	16,21	1,85	25,69	2,33	6,72	1,19	9,48	1,62	3,71
		5			5,83	19,79	1,84	31,40	2,32	8,18	1,18	11,61	1,66	4,58
		6			6,92	23,21	1,83	36,81	2,31	9,60	1,18	13,60	1,70	5,43
		8			9,04	29,55	1,81	46,77	2,27	12,34	1,17	17,22	1,78	7,10
		10			11,08	35,32	1,79	55,64	2,24	15,00	1,16	20,32	1,85	8,70
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96	18,86	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	11,00	1,69	3,90
		5			6,13	23,10	1,94	36,80	2,44	9,52	1,25	13,70	1,74	4,81
		6			7,28	27,06	1,93	42,91	2,43	11,18	1,24	15,90	1,78	5,72
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	29,04	2,16	46,03	2,72	12,04	1,39	17,00	1,88	4,87
		5			6,86	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	18,70	1,90	5,38
		6			8,15	37,58	2,15	59,64	2,71	15,52	1,38	22,10	1,94	6,39
		7			9,42	42,98	2,14	68,19	2,69	17,77	1,37	25,20	1,99	7,39
		8			10,67	48,16	2,12	76,35	2,68	19,97	1,37	28,20	2,02	8,37
7,5	75	5	9,0	3,0	7,39	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	23,10	2,02	5,80
		6			8,78	46,57	2,30	73,87	2,90	19,28	1,48	27,30	2,06	6,89
		7			10,15	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,48	31,20	2,10	7,96
		8			11,50	59,84	2,28	94,89	2,87	24,80	1,47	35,00	2,15	9,02
		9			13,83	66,10	2,27	104,72	2,86	27,48	1,46	38,60	2,18	10,07
8	80	5,5	9,0	3,0	8,63	52,68	2,47	83,56	3,11	21,80	1,59	30,90	2,17	6,78
		6			9,38	56,97	2,47	90,40	3,11	23,54	1,58	33,40	2,19	7,36
		7			10,85	65,31	2,45	103,66	3,09	26,97	1,58	38,30	2,23	8,51
		8			12,30	73,36	2,44	116,39	3,08	30,32	1,57	43,00	2,27	9,65
		10			15,14	88,58	2,42	140,31	3,04	36,85	1,56	56,70	2,35	11,88
		12			17,90	102,74	2,40	162,27	3,01	43,21	1,55	59,50	2,42	14,05
9	90	6	10,0	3,3	10,61	82,10	2,78	130,00	3,50	33,97	1,79	48,10	2,43	8,33
		7			12,28	94,30	2,77	149,67	3,49	38,94	1,78	55,40	2,47	9,64
		8			13,93	106,11	2,76	168,42	3,48	43,80	1,77	62,30	2,51	10,93
		9			15,60	118,00	2,75	186,00	3,46	48,60	1,77	68,00	2,55	12,20
		10			17,17	128,60	2,74	203,93	3,45	53,27	1,76	75,30	2,59	13,48
		12			20,33	149,67	2,71	235,88	3,41	62,40	1,75	86,20	2,67	15,96
10	100	6,5	12,0	4,0	12,82	122,10	3,09	193,46	3,89	50,73	1,99	71,40	2,68	10,06
		7			13,75	130,59	3,08	207,01	3,88	54,16	1,98	76,40	2,71	10,79
		8			15,60	147,19	3,07	233,46	3,87	60,92	1,98	86,30	2,75	12,25
		10			19,24	178,95	3,05	283,83	3,84	74,08	1,96	110,00	2,83	15,10
		12			22,80	208,90	3,03	330,95	3,81	86,87	1,95	122,00	2,91	17,90
		14			26,28	237,15	3,00	374,98	3,78	99,32	1,94	138,00	2,99	20,63
		15			27,99	250,68	2,99	395,87	3,76	105,48	1,94	145,00	3,03	21,97
16	29,68	263,82	2,98	416,04	3,74	111,61	1,94	152,00	3,05	23,30				
11	110	7	12,0	4,0	15,15	175,61	3,40	278,54	4,29	72,68	2,19	106,00	2,96	11,87

Но- мер угол- ка	Размеры уголка, мм				Пло- щадь попе- речного сече- ния, см ²	Справочные величины для осей								Масса 1 м уголка, кг
	b	t	R	r		x - x		x ₀ - x ₀		y ₀ - y ₀		J _{xy} , см ⁴	z ₀ , см	
						J _x , см ⁴	i _x , см	J _{x₀max} , см ⁴	i _{x₀max} , см	J _{y₀min} , см ⁴	i _{y₀min} , см			
12	120	6	14,0	4,5	17,20	198,17	3,39	314,51	4,28	81,83	2,18	116,00	3,00	13,50
		8			18,80	259,75	3,72	412,45	4,68	107,04	2,39	153,00	3,25	14,76
		10			23,24	317,16	3,69	503,79	4,66	130,54	2,37	187,00	3,33	18,24
		12			27,60	371,80	3,67	590,28	4,62	153,33	2,36	218,00	3,41	21,67
		15			33,89	448,90	3,63	711,32	4,57	186,48	3,34	262,00	3,53	26,68
12,5	125	8	14,0	4,6	19,69	294,36	3,87	466,76	4,87	121,96	2,49	172,00	3,36	15,46
		9			22,00	327,48	3,86	520,00	4,86	135,88	2,48	192,00	3,40	17,30
		10			24,33	359,82	3,85	571,04	4,84	148,59	2,47	211,00	3,45	19,10
		12			28,89	422,23	3,82	670,02	4,82	174,43	2,46	248,00	3,53	22,68
		14			33,37	481,76	3,80	763,90	4,78	199,62	2,45	282,00	3,61	26,20
		16			37,77	538,56	3,78	852,84	4,75	224,29	2,44	315,00	3,68	29,65
14	140	9	14,0	4,6	24,72	465,72	4,34	739,42	5,47	192,03	2,79	274,00	3,78	19,41
		10			27,33	512,29	4,33	813,62	5,46	210,96	2,78	301,00	3,82	21,45
		12			32,49	602,49	4,31	956,98	5,43	248,01	2,76	354,00	3,90	25,50
15	150	10	14,0	4,6	29,33	634,76	4,65	1008,56	5,86	260,97	2,98	374,00	4,07	23,02
		12			34,89	747,48	4,63	1187,86	5,83	307,09	2,97	440,00	4,15	27,39
		15			43,08	908,38	4,59	1442,60	5,79	374,17	2,95	534,00	4,27	33,82
		18			51,09	1060,08	4,56	1680,92	5,74	439,24	2,93	621,00	4,38	40,11
16	160	10	16,0	5,3	31,43	774,24	4,96	1229,10	6,25	319,38	3,19	455,00	4,30	24,67
		11			34,42	844,21	4,95	1340,66	6,24	347,77	3,18	496,00	4,35	27,02
		12			37,39	912,89	4,94	1450,00	6,23	375,78	3,17	537,00	4,39	29,35
		14			43,57	1046,47	4,92	1662,13	6,20	430,81	3,16	615,00	4,47	33,97
		16			49,07	1175,19	4,89	1865,73	6,17	484,64	3,14	690,00	4,55	38,52
		18			54,79	1290,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	3,13	771,00	4,63	43,01
		20			60,40	1418,85	4,85	2248,26	6,10	589,43	3,12	830,00	4,70	47,44
18	180	11	16,0	5,3	38,80	1216,44	5,60	1933,10	7,06	499,78	3,59	716,00	4,85	30,47
		12			42,19	1316,62	5,59	2092,78	7,04	540,45	3,58	776,00	4,89	33,12
		15			52,18	1607,36	5,55	2554,99	7,00	659,73	3,56	948,00	5,01	40,96
		18			61,99	1884,07	5,51	2992,69	6,95	775,44	3,54	1108,00	5,13	48,66
		20			68,43	2061,11	5,49	3271,31	6,91	850,92	3,53	1210,00	5,20	53,72
20	200	12	18,0	6,0	47,10	1822,78	6,22	2896,16	7,84	749,40	3,99	1073,00	5,37	36,97
		13			50,85	1960,77	6,21	3116,18	7,83	805,35	3,98	1156,00	5,42	39,92
		14			54,60	2097,00	6,20	3333,00	7,81	861,60	3,97	1236,00	5,46	42,80
		16			61,98	2362,57	6,17	3755,39	7,78	969,74	3,96	1393,00	5,54	48,65
		18			69,30	2620,64	6,15	4164,54	7,75	1076,74	3,94	1544,00	5,62	54,40
		20			76,54	2871,47	6,12	4560,42	7,72	1181,92	3,93	1689,00	5,70	60,08
		24			90,78	3350,66	6,08	5313,59	7,65	1387,73	3,91	1963,00	5,85	71,26
		25			94,29	3466,21	6,06	5494,04	7,63	1438,38	3,91	2028,00	5,89	74,02
		30			111,54	4019,60	6,00	6351,05	7,55	1698,16	3,89	2332,00	6,07	87,56
22	220	14	21,0	7,0	60,38	2814,36	6,83	4470,15	8,60	1158,56	4,38	1655,00	5,91	47,40
		16			68,58	3175,44	6,80	5045,37	8,58	1305,02	4,36	1862,00	6,02	53,83
25	250	16	24,0	8,0	78,40	4717,10	7,76	7492,10	9,78	1942,09	4,98	2775,00	6,75	61,55
		18			87,72	5247,24	7,73	8336,69	9,75	2157,78	4,96	3089,00	6,83	68,86
		20			96,96	5764,87	7,71	9159,73	9,72	2370,01	4,94	3395,00	6,91	76,11
		22			106,12	6270,32	7,69	9961,60	9,69	2579,04	4,93	3691,00	7,00	83,31
		25			119,71	7006,39	7,65	11125,52	9,64	2887,26	4,91	4119,00	7,11	93,97
		28			133,12	7716,86	7,61	12243,84	9,59	3189,89	4,90	4527,00	7,23	104,50
		30			141,96	8176,51	7,59	12964,66	9,56	3388,98	4,89	4788,00	7,31	111,44

Уголки стальные горячекатаные неравнополочные (ГОСТ 8510-86)

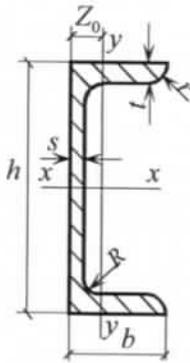


- B – ширина большей полки;
 b – ширина меньшей полки;
 t – толщина полки;
 R – радиус внутреннего закругления;
 r – радиус закругления полок;
 J – момент инерции;
 i – радиус инерции;
 x_0, y_0 – расстояние от центра тяжести до наружных граней полок;
 J_{xy} – центробежный момент инерции (абсолютная величина)

Номер уголка	Размеры уголка, мм					Площадь поперечного сечения, см ²	Справочные величины для осей								Угол на- клона оси tg α , град	Масса 1 м уголка, кг	
	B	b	t	R	r		$x-x$		$y-y$		$u-u$		$x_0, \text{ см}$	$y_0, \text{ см}$			$J_{xy}, \text{ см}^4$
							$J_x, \text{ см}^4$	$i_x, \text{ см}$	$J_y, \text{ см}^4$	$i_y, \text{ см}$	$J_u, \text{ мин}, \text{ см}^4$	$i_u, \text{ см}$					
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,70	0,78	0,22	0,44	0,13	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392	0,91
3/2	30	20	3	3,5	1,2	1,43	1,27	0,94	0,45	0,56	0,26	0,43	0,51	1,00	0,43	0,427	1,12
			4			1,86	1,61	0,93	0,56	0,55	0,34	0,43	0,54	1,04	0,54	0,421	1,46
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	0,28	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382	1,17
			4			1,94	1,93	1,00	0,57	0,54	0,35	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374	1,52
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	3,06	1,27	0,93	0,70	0,56	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385	1,48
			4			2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	0,71	0,54	0,63	1,37	1,22	0,381	1,94
			5			3,03	4,73	1,25	1,41	0,68	0,86	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374	2,38
4/3	40	30	4	4,0	1,3	2,67	4,18	1,25	2,01	0,87	1,09	0,64	0,78	1,28	1,68	0,544	2,09
			5			3,28	5,04	1,24	2,41	0,86	1,33	0,64	0,82	1,32	2,00	0,539	2,57
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	4,41	1,43	1,32	0,79	0,79	0,61	0,64	1,47	1,38	0,382	1,68
			4			2,80	5,68	1,42	1,69	0,78	1,02	0,60	0,68	1,51	1,77	0,379	2,20
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	6,18	1,60	1,99	0,91	1,18	0,70	0,72	1,60	2,01	0,403	1,90
			4			3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401	2,49
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	11,37	1,78	3,70	1,02	2,19	0,78	0,84	1,82	3,74	0,406	2,81
			5			4,41	13,82	1,77	4,48	1,01	2,65	0,78	0,88	1,87	4,50	0,404	3,46
6,3/4,0	63	40	4	7,0	2,3	4,04	16,33	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397	3,17
			5			4,98	19,91	2,00	6,26	1,12	3,73	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396	3,91
			6			5,90	23,31	1,99	7,29	1,11	4,36	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393	4,63
			8			7,68	29,60	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	1,07	2,20	9,27	0,386	6,03
6,5/5	65	50	5	6,0	2,0	5,56	23,41	2,05	12,08	1,47	6,41	1,07	1,26	2,00	9,77	0,576	4,36
			6			6,60	27,46	2,04	14,12	1,46	7,52	1,07	1,30	2,04	11,46	0,575	5,18
			7			7,62	31,32	2,03	16,05	1,45	8,60	1,06	1,34	2,08	12,94	0,571	5,98
			8			8,62	35,00	2,02	18,88	1,44	9,65	1,06	1,37	2,12	13,61	0,570	6,77
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	27,76	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	1,05	2,28	9,12	0,406	4,39
7,5/5	75	50	5	8,0	2,7	6,11	34,81	2,39	12,47	1,43	7,24	1,09	1,17	2,39	12,00	0,436	4,79
			6			7,25	40,92	2,38	14,60	1,42	8,48	1,08	1,21	2,44	14,10	0,435	5,69
			7			8,37	46,77	2,36	16,61	1,41	9,69	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435	6,57
			8			9,47	52,38	2,35	18,52	1,40	10,87	1,07	1,29	2,52	17,80	0,430	7,43

Номер уголка	Размеры уголка, мм					Площадь попе- речного сечения, см ²	Справочные величины для осей									Угол на- клона оси tg α, град	Масса 1 м уголка, кг
	B	b	t	R	r		x-x		y-y		u-u		x ₀ , см	y ₀ , см	J _{yy} , см ⁴		
							J _{xx} , см ⁴	i _{xx} , см	J _{yy} , см ⁴	i _{yy} , см	J _u min ² , см ⁴	i _u , см					
8/5	80	50	5	8,0	2,8	6,3	41,64	2,56	12,68	1,41	7,57	1,09	1,13	2,60	13,20	0,387	4,99
			7,55			48,98	2,55	14,85	1,40	8,88	1,08	1,17	2,65	15,50	0,386	5,92	
8/6	80	60	6	8,0	2,9	8,15	52,06	2,53	25,18	1,76	13,61	1,29	1,49	2,47	20,98	0,547	6,39
			9,42			59,61	2,52	28,74	1,75	15,58	1,29	1,53	2,52	24,01	0,546	7,39	
			10,67			66,88	2,50	32,15	1,74	17,49	1,28	1,57	2,56	26,83	0,544	8,37	
9/5,6	90	56	5,5	9,0	3,0	7,86	65,28	2,88	19,67	1,58	11,77	1,22	1,2	2,92	20,54	0,384	6,17
			8,54			70,58	2,88	21,22	1,58	12,70	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384	6,70	
			11,18			90,87	2,85	27,08	1,56	16,29	1,21	1,36	3,04	28,33	0,380	8,77	
10/6,3	100	63	6	10,0	3,3	9,58	98,29	3,20	30,58	1,79	18,20	1,38	1,42	3,23	31,50	0,393	7,53
			11,09			112,86	3,19	34,99	1,78	20,83	1,37	1,46	3,28	36,10	0,392	8,70	
			12,57			126,96	3,18	39,21	1,77	23,38	1,36	1,50	3,32	40,50	0,391	9,87	
			15,47			153,83	3,15	47,18	1,75	28,34	1,35	1,58	3,40	48,60	0,387	12,14	
10/6,5	100	65	7	10,0	3,4	11,23	114,05	3,19	38,32	1,85	22,77	1,41	1,52	3,24	38,00	0,415	8,81
			12,73			138,31	3,18	42,96	1,84	25,24	1,41	1,56	3,28	42,64	0,414	9,90	
			15,67			155,52	3,15	51,68	1,82	30,60	1,40	1,64	3,37	51,18	0,410	12,30	
11/7	110	70	6,5	10,0	3,5	11,45	142,42	3,53	45,61	2,00	26,94	1,53	1,58	3,55	46,80	0,402	8,98
			13,93			171,54	3,51	54,64	1,98	32,31	1,52	1,64	3,61	55,90	0,400	10,93	
12,5/8	125	80	7	11,0	3,7	14,06	226,53	4,01	73,73	2,29	43,40	1,76	1,80	4,01	74,70	0,407	11,04
			15,98			255,62	4,00	80,95	2,28	48,82	1,75	1,84	4,04	84,10	0,406	12,54	
			19,70			311,61	3,98	100,47	2,26	59,33	1,74	1,92	4,14	102,00	0,404	15,47	
			23,36			364,79	3,95	116,84	2,24	69,47	1,72	2,00	4,22	118,00	0,400	18,34	
14/9	140	90	8	12,0	4,0	18,00	363,68	4,49	119,79	2,58	70,47	1,98	2,03	4,49	121,00	0,411	14,13
			22,24			444,65	4,47	145,54	2,56	85,51	1,96	2,12	4,58	147,00	0,409	17,46	
16/10	160	100	9	13,0	4,3	22,87	605,97	5,15	186,03	2,85	110,40	2,20	2,24	5,19	194,00	0,391	17,95
			25,28			666,59	5,13	204,09	2,84	121,16	2,19	2,28	5,23	213,00	0,390	19,85	
			30,04			784,22	5,11	238,75	2,82	142,14	2,18	2,36	5,32	249,00	0,388	23,58	
			34,72			897,19	5,08	271,60	2,80	162,49	2,16	2,43	5,40	282,00	0,385	27,26	
18/11	180	110	10	14,0	4,7	28,33	952,28	5,80	276,37	3,12	165,44	2,42	2,44	5,88	295,00	0,376	22,24
			33,69			1122,56	5,77	324,09	3,10	194,28	2,40	2,52	5,97	348,00	0,374	26,45	
20/12,5	200	125	11	15,0	5,6	34,87	1449,62	6,45	446,36	3,58	263,84	2,75	2,79	6,50	465,00	0,392	27,37
			37,89			1568,19	6,43	481,93	3,57	285,04	2,74	2,83	6,54	503,00	0,392	29,74	
			43,87			1800,83	6,41	550,77	3,54	326,54	2,73	2,91	6,62	575,00	0,390	34,43	
			49,77			2026,08	6,38	616,66	3,52	365,99	2,72	2,99	6,71	643,00	0,388	39,07	

Сталь горячекатаная. Швеллеры с параллельными гранями полок
(ГОСТ 8240-97)

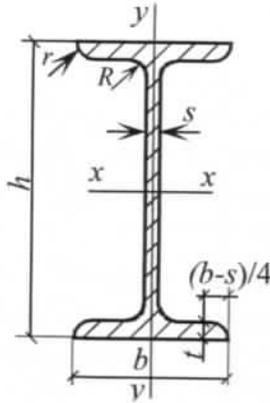


- h – высота швеллера;
 b – ширина полки;
 s – толщина стенки;
 t – толщина полки;
 R – радиус внутреннего закругления;
 r – радиус закругления полки;
 J – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 i – радиус инерции;
 S – статический момент полусечения;
 Z_0 – расстояние от оси $y-y$ до наружной грани стенки

Номер швеллера	Размеры швеллера, мм						Площадь сечения, см ²	Масса 1 м швеллера, кг	Справочные величины для осей						Z_0 , см	
	h	b	s	t	R	r			$x-x$			$y-y$				
									J_x , см ⁴	W_{x3} , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_{y3} , см ³		i_y , см
5	50	32	4,4	7,0	6,0	3,5	6,16	4,84	22,8	9,14	1,92	5,61	5,95	2,99	0,983	1,21
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	3,5	7,51	5,90	48,8	15,00	2,55	9,02	9,35	4,06	1,120	1,29
8	80	40	4,5	7,4	6,5	3,5	8,98	7,05	89,8	22,50	3,16	13,30	13,90	5,31	1,240	1,38
10	100	46	4,5	7,6	7,0	4,0	10,90	8,59	175,0	34,90	3,99	20,50	22,60	7,37	1,440	1,53
12	120	52	4,8	7,8	7,5	4,5	13,30	10,40	305,0	50,80	4,79	29,70	34,90	9,84	1,620	1,66
14	140	58	4,9	8,1	8,0	4,5	15,60	12,30	493,0	70,40	5,61	40,90	51,50	12,90	1,810	1,82
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	4,5	17,00	13,30	547,0	78,20	5,68	45,20	65,20	15,70	1,960	1,97
16	160	64	5,0	8,4	8,5	5,0	18,10	14,20	750,0	93,80	6,44	54,30	72,80	16,40	2,000	2,04
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	5,0	19,50	15,30	827,0	103,00	6,51	59,50	90,50	19,60	2,150	2,19
18	180	70	5,1	8,7	9,0	5,0	20,70	16,30	1090,0	121,00	7,26	70,00	100,00	20,60	2,200	2,14
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	5,0	22,20	17,40	1200,0	133,00	7,34	76,30	123,00	24,30	2,350	2,36
20	200	76	5,2	9,0	9,5	5,5	23,40	18,40	1530,0	153,00	8,08	88,00	134,00	25,20	2,390	2,30
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	5,5	25,20	19,80	1680,0	168,00	8,17	96,20	162,00	29,70	2,540	2,53
22	220	82	5,4	9,5	10,0	6,0	26,70	21,00	2120,0	193,00	8,90	111,00	178,00	31,00	2,580	2,47
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	6,0	28,80	22,60	2340,0	212,00	9,01	121,00	220,00	37,00	2,770	2,75
24	240	90	5,6	10,0	10,5	6,0	30,60	24,00	2910,0	243,00	9,75	139,00	248,00	39,50	2,850	2,72
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	6,0	32,90	25,80	3200,0	266,00	9,86	152,00	302,00	46,50	3,030	3,01
27	270	95	6,0	10,5	11,0	6,5	35,20	27,70	4180,0	310,00	10,90	178,00	314,00	46,70	2,990	2,78
30	300	100	6,5	11,0	12,0	7,0	40,50	31,80	5830,0	389,00	12,00	224,00	393,00	54,80	3,120	2,83
33	330	105	7,0	11,7	13,0	7,5	46,50	36,50	8010,0	486,00	13,10	281,00	491,00	64,60	3,250	2,90
36	360	110	7,5	12,6	14,0	8,5	53,40	41,90	10850,0	603,00	14,30	350,00	611,00	76,30	3,380	2,99
40	400	115	8,0	13,5	15,0	9,0	61,50	48,30	15260,0	763,00	15,80	445,00	760,00	89,90	3,510	3,05

Таблица А4

Сталь горячекатаная. Балки двутавровые (ГОСТ 8239-89)



h – высота балки;
 b – ширина полки;
 s – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 R – радиус внутреннего закругления;
 r – радиус закругления полки;
 J – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 i – радиус инерции;
 S – статический момент полусечения

Но- мер бал- ки	Размеры балки, мм						Пло- щадь сече- ния, см ²	Масса 1 м дву- тавра, кг	Справочные величины для осей						
	h	b	s	t	R	r			$x-x$				$y-y$		
									J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	19,90	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,40	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,90	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,20	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54