

624  
3-635



МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ  
СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

Б.М. ЗИНОВЬЕВ, Т.Ф. КАРМАНОВА

ПЛОСКИЕ СТЕРЖНЕВЫЕ  
СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Учебное пособие

Новосибирск 2002

ББК 38.112

УДК 624.04  
3-635

Зиновьев Б.М., Карманова Т.Ф. Плоские стержневые статически определимые системы: Учеб. пособие. — Новосибирск: Изд-во СГУПСа, 2001. — 118 с.

Кратко изложены основы теории расчета плоских стержневых статически определимых систем с примерами решения задач. Приведены варианты заданий на контрольные работы.

Пособие предназначено для студентов заочной формы обучения.

Ответственный редактор  
д-р техн. наук, проф. Б.М. Зиновьев

#### Р е ц е н з е н т ы:

Кафедра «Строительная механика» НГАСУ (завкафедрой  
д-р техн. наук, проф. Г.И. Гребенюк

Завкафедрой «Строительные конструкции и здания» СГУПСа  
д-р техн. наук, проф. В.С. Казарновский

© Зиновьев Б.М., Карманова Т.Ф., 2002

© Сибирский государственный  
университет путей сообщения, 2002

#### ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с программой весь курс строительной механики стержневых систем делится на три части. В первых двух частях рассматривается расчет статически определимых (I часть) и статически неопределенных (II часть) систем на действие неподвижных и подвижных нагрузок, изменения температуры и перемещения опор; в третьей части изучаются колебания и устойчивость конструкций.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов строительных специальностей заочной формы обучения и содержит материал, относящийся к первой части курса строительной механики — расчету статически определимых конструкций.

Строительная механика в широком смысле слова — наука о принципах и методах расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

Расчет на прочность обеспечивает целостность конструкции, ее неразрушение под действием внешних нагрузок, изменения температуры, осадок опор.

Расчет на жесткость ограничивает перемещения (деформации) конструкции, при которых сохраняется возможность нормальной эксплуатации сооружения.

Расчет на устойчивость обеспечивает сохранение равновесного состояния конструкции под действием внешних факторов.

Строительную механику в широком смысле составляют следующие дисциплины: сопротивление материалов, строительная механика стержневых систем, строительная механика пластин и оболочек, прикладная теория упругости и пластичности и др. Предметом нашего изучения является строительная механика стержневых систем.

Стержневой называется система, составленная из стержней, чаще всего прямолинейных, соединенных между собой в узлах

жестко или шарнирно. Жесткое соединение стержней в металлических конструкциях обеспечивается с помощью сварки, высокопрочных болтов или заклепок; в железобетонных конструкциях — омоноличиванием узлов.

К стержневым системам относят следующие виды конструкций: плоские и пространственные рамы и фермы, многопролетные шарнирные и неразрезные балки, шарнирные и бесшарнирные арки.

Плоской называют стержневую систему, у которой оси всех стержней, а также линии действия внешних сил и реакций лежат в одной плоскости.

В настоящем пособии кратко излагаются некоторые методы вычисления внутренних усилий в плоских статически определимых стержневых системах от неподвижных и подвижных нагрузок.

В главе 1 кратко излагается исследование геометрической неизменяемости плоских стержневых систем.

В главе 2 рассматривается построение эпюр внутренних усилий в рамках.

В главе 3 излагаются основы теории расчета конструкций на подвижную нагрузку с применением линий влияния.

В главах 4, 5, 6 рассматриваются способы расчета многопролетных шарнирных балок, трехшарнирных арок, плоских ферм на действие подвижной и неподвижной нагрузок.

В главе 7 приведены варианты задач для контрольных работ.

При выполнении контрольных работ, перед тем как приступить к решению какой-либо задачи, следует изучить содержание соответствующих глав настоящего пособия. При необходимости более подробную информацию можно получить в рекомендуемых учебниках [1–5] и сборнике задач [6]:

1. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. М.: Высш. шк., 1986. 608 с.

2. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов / Под. ред. А.Е. Саргсяна. М.: Высш. шк., 2000. 416 с.

3. Строительная механика. Стержневые системы / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. М.: Стройиздат, 1981. 512 с.

4. Строительная механика / Под ред. А.В. Даркова. М.: Высш. шк., 1976. 600 с.

5. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. М.: Изд-во АСВ, 1996. 541 с.

6. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Под ред. Г.К. Клейна. М.: Высш. шк., 1980. 384 с.

## 1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

### 1.1. Расчетная схема сооружения (конструкции)

При расчете сооружения инженер имеет дело не с реальной конструкцией, а с ее расчетной схемой. Расчетная схема — это упрощенное изображение реальной конструкции; в ней сохраняются основные свойства конструкции и отбрасываются второстепенные, не оказывающие существенного влияния на результаты расчета. Наиболее отчетливо отличие расчетной схемы от реальной конструкции видно на примере фермы. В реальной ферме узлы являются жесткими (рис. 1.1, а), в расчетной схеме — шарнирными (рис. 1.1, б). Замена жестких узлов шарнирными при достаточной длине стержней фермы незначительно скаживается на точности расчетов и при этом чрезвычайно упрощает расчет.

На рис. 1.1, в изображена однопролетная балка, на рис. 1.1, г — ее расчетная схема.

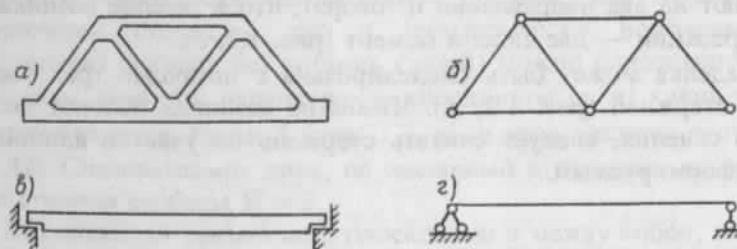


Рис. 1.1

В расчетной схеме вместо стержней конструкции, имеющих размеры поперечных сечений конечной величины, изображаются обычно только оси стержней.

Расчетная схема сооружения проверяется и уточняется путем сравнения результатов экспериментальных исследований и теоретических результатов расчета.

### 1.2. Опоры и возникающие в них реакции

При изображении расчетных схем обычно используются три типа опор: шарнирно-подвижная, шарнирно-неподвижная, защемляющая неподвижная опора, или заделка.

В *шарнирно-подвижной опоре* возникает реакция, направленная вдоль опорного стержня (рис. 1.2, а, б). Опорный стержень считается недеформируемым.

*Шарнирно-неподвижная опора* изображается обычно в виде двух опорных стержней, соединенных между собой и с фундаментом тремя шарнирами. Реакция в такой опоре проходит через общий для опорных стержней шарнир, ее направление заранее неизвестно. Обычно реакцию в такой опоре раскладывают на две компоненты, выбирая направления для них из соображений удобства расчета. Поэтому иногда говорят, что в шарнирно неподвижной опоре возникают две реакции. На рис. 1.2, в, г, д показаны три равнозначных изображения шарнирно-неподвижной опоры; реакция *R* на рисунках разложена на вертикальную *V* и горизонтальную *H* компоненты.

В *заделке* возникают реакция в виде силы, направление которой заранее неизвестно, и реактивный момент. Силу раскладывают на два направления и говорят, что в заделке возникают три реакции — две силы и момент (рис. 1.2, е).

Заделка может быть смоделирована с помощью трех опорных стержней (рис. 1.2, ж). Чтобы не возникла поворот опорного сечения, следует считать стержень на участке длиной *l<sub>0</sub>* недеформируемым.

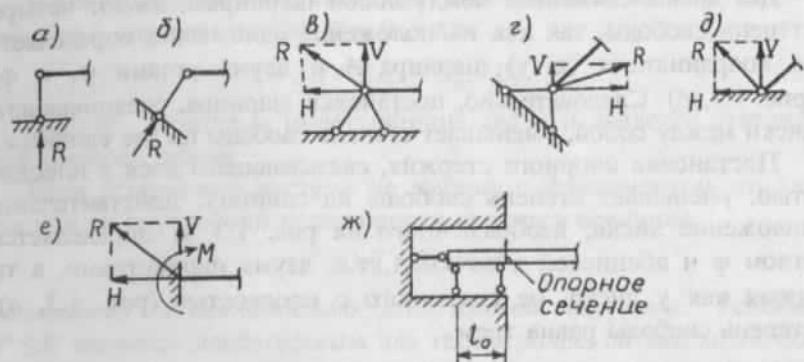


Рис. 1.2.

### 1.3. Необходимые условия геометрической неизменяемости стержневых систем

Любая стержневая система, используемая в качестве конструкции, должна быть *геометрически неизменяемой*, т.е. такой, изменение формы которой происходит только за счет деформации ее стержней.

Геометрическая изменяемость характеризуется степенью свободы. Степень свободы *W* — это *наименьшее количество геометрических параметров, определяющих положение тела на плоскости при его движении*. При этом изменение положения тела за счет деформаций в расчет не принимается.

Положение жесткого диска на плоскости (*диском* называется любая геометрически неизменяемая система: как отдельный, одиничный стержень, так и геометрически неизменяемая стержневая система без лишних связей) можно однозначно определить, зная три параметра — координаты (*x*, *y*) какой-либо точки, например точки *A* (рис. 1.3, а), и угол наклона *φ* отрезка *AB*. Следовательно, диск, не связанный с плоскостью, имеет три степени свободы *W = 3*.

Два диска, не связанные с плоскостью и между собой, имеют шесть степеней свободы *W = 3Д = 3 × 2 = 6* (здесь буквой *Д* обозначено количество дисков *D = 2*).

Два диска, связанные между собой шарниром, имеют четыре степени свободы, так как их положение однозначно определяется координатами  $(x, y)$  шарнира  $A$  и двумя углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (рис. 1.3, б). Следовательно, постановка шарнира, соединяющего диски между собой, уменьшает степень свободы на две единицы.

Постановка опорного стержня, связывающего диск с плоскостью, уменьшает степень свободы на единицу. Действительно, положение диска, изображенного на рис. 1.3, в, определяется углом  $\varphi$  и абсциссой  $x$  точки  $A$ , т.е. двумя параметрами, в то время как у диска, не связанного с плоскостью (рис. 1.3, а), степень свободы равна трем.

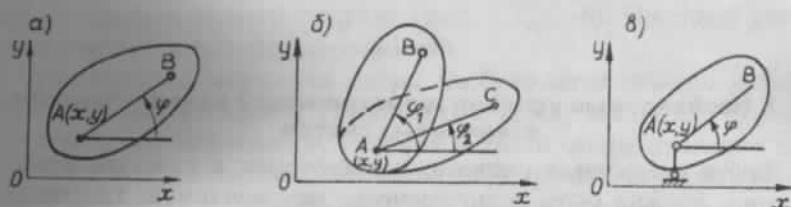


Рис. 1.3

Таким образом, формула степени свободы для системы дисков запишется так:

$$W = 3D - 2W - C_0, \quad (1.1)$$

где  $D$  — количество дисков;  $W$  — количество простых шарниров, соединяющих диски между собой;  $C_0$  — количество опорных стержней.

*Простым шарниром* называют шарнир, соединяющий два диска. Шарнир, соединяющий три диска, называется *кратным*, он заменяет два простых шарнира, его кратность равна двум. Если шарнир соединяет  $n$  дисков, то его кратность равна  $(n-1)$ , он заменяет  $(n-1)$  простых шарниров.

Необходимое условие геометрической неизменяемости, т.е. отсутствие подвижности системы, записывается так:  $W \leq 0$ , или

$$3D - 2W - C_0 \leq 0. \quad (1.2)$$

Необходимое условие геометрической неизменяемости и статической определимости:  $W = 0$ , или

$$3D - 2W - C_0 = 0. \quad (1.3)$$

При  $W < 0$  система имеет лишние связи и является статически неопределенной.

Если стержневая система не связана с фундаментом, то для оценки ее внутренней подвижности вводится величина

$$V = 3D - 2W - 3,$$

называемая *изменяемостью стержневой системы*. Условие  $V \leq 0$  является необходимым для геометрической неизменяемости системы. В статически определимых системах  $V = 0$ . При  $V < 0$  система статически неопределенна.

#### 1.4. Способы образования геометрически неизменяемых систем

Условия (1.2) и (1.3) являются необходимыми, но недостаточными условиями геометрической неизменяемости стержневой системы. Они показывают, что имеется достаточное количество опорных стержней, дисков и шарниров, чтобы из них можно было собрать геометрически неизменяемую систему.

На рис. 1.4, а изображена система, для которой  $W = 0$ . Однако очевидно, что та часть системы, которая расположена правее шарнира  $C$ , не может сохранять свое горизонтальное положение под нагрузкой: она является геометрически изменяемой. Система собрана неверно. Чтобы превратить ее в геометрически неизменяемую, достаточно шарниро-подвижную опору  $B$  поставить правее шарнира  $C$  (рис. 1.4, б).

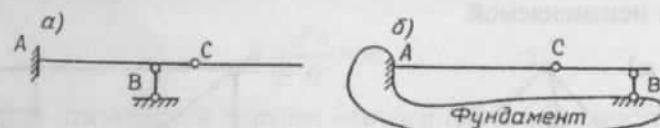


Рис. 1.4

Существуют способы образования заведомо геометрически неизменяемых систем. Приведем два самых простых и наиболее распространенных из них:

1. Три диска соединяются тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (так называемый шарнирный треугольник) (рис. 1.5, а).

2. Два диска соединяются тремя или более стержнями, продолжения осей которых не пересекаются в одной точке и не параллельны друг другу (рис. 1.5, б).

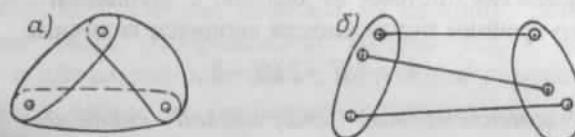


Рис. 1.5

Проанализируем систему, изображенную на рис. 1.4, б и убедимся, что она действительно является геометрически неизменяемой. При анализе необходимо учитывать фундамент, принимая его за отдельный диск. Фундамент вместе со стержнем  $AC$  образует единый диск. Следовательно, система состоит из трех дисков: стержня  $AC$  вместе с фундаментом, стержня  $BC$  и опорного стержня. Эти три диска соединяются тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, а это означает, что система собрана по первому способу и является геометрически неизменяемой.

Проанализируем систему, изображенную на рис. 1.6, а. Система состоит из двух дисков: большого треугольника  $ABC$  и маленького  $abc$ . Эти два диска соединяются тремя стержнями:  $aA$ ,  $bB$  и  $cC$ , не пересекающимися в одной точке. Следовательно, система собрана по второму способу и является геометрически неизменяемой.

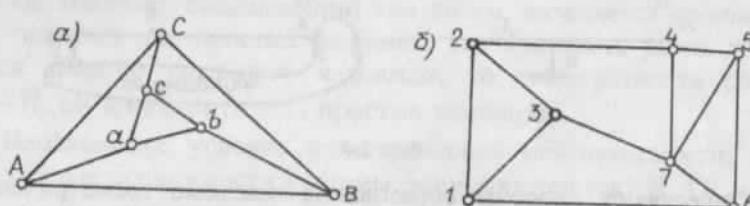


Рис. 1.6

По второму способу образована также система, изображенная на рис. 1.6, б: два диска 1-2-3 и 4-5-6-7 соединяются тремя стержнями: 2-4, 3-7 и 1-6, не пересекающимися в одной точке.

### 1.5. Понятие о мгновенно изменяемых системах

Мгновенно изменяемые системы не могут использоваться в качестве конструкций, поэтому необходимо уметь распознавать мгновенную изменяемость.

Для распознавания мгновенной изменяемости существуют два основных способа — кинематический и статический.

#### Кинематические признаки мгновенной изменяемости:

1) три диска соединяются тремя шарнирами, лежащими на одной прямой;

2) два диска соединяются тремя или более стержнями, продолжения осей которых пересекаются в одной точке или параллельны друг другу.

#### Статические признаки мгновенной изменяемости:

1) при конечной величине внешних нагрузок внутренние усилия и реакции достигают теоретически бесконечно больших значений;

2) усилия и реакции не определяются однозначно.

Примеры мгновенно изменяемых систем приведены на рис. 1.7. Найдем реакцию  $R$  в правой опоре рамы, изображенной на рис. 1.7, а. Для этого приравняем нулю сумму моментов относительно шарнира  $B$  всех сил, приложенных к правой части рамы:

$$\sum m_B^{\text{пп}} = P \cdot a - R \cdot 0 = 0,$$

откуда получаем:

$$R = \frac{Pa}{0} = \infty.$$

Это есть статический признак мгновенной изменяемости.

Налицо и кинематический признак мгновенной изменяемости: три диска — фундамент вместе с заделанным в фундамент стержнем  $AB$ , диск  $BC$  и опорный стержень — соединяются тремя шарнирами, лежащими на одной прямой (рис. 1.7, б).

Система на рис. 1.7, в также является мгновенно изменяющейся. Найдем реакцию  $V_A$  из суммы проекций всех сил на вертикальную ось  $Y$ :

$$\sum Y = V_A - P = 0, \quad V_A = P.$$

Найдем реакцию  $V_A$  из другого уравнения, составив сумму моментов всех сил относительно шарнира  $B$ :

$$\sum m_B = V_A l - Pa = 0, \quad V_A = Pa/l.$$

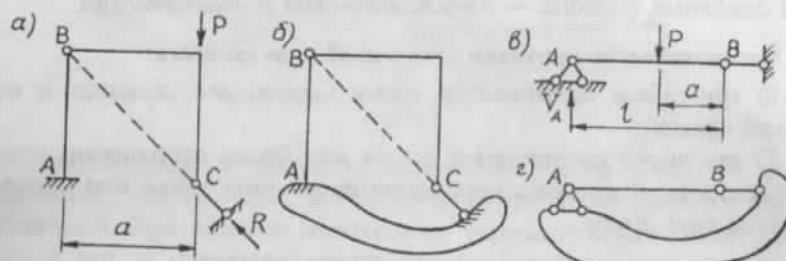


Рис. 1.7

Нашли значение реакции, не совпадающее с полученным выше. Это есть статический признак мгновенной изменяемости. Мгновенная изменяемость подтверждается и анализом геометрической структуры системы; она состоит из трех дисков: фундамента вместе с двумя левыми опорными стержнями, образующими шарнирный треугольник, стержня  $AB$  и опорного горизонтального стержня, — соединенных тремя шарнирами, лежащими на одной прямой (рис. 1.7, г).

## 2. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ РАМЫ

### 2.1. Рамы, их типы и назначение

**Рама** — геометрически неизменяемая стержневая система, элементы которой во всех или некоторых узлах соединены жестко между собой.

Обычно раму составляют вертикальные стойки (колонны) и поперечные балки (ригели), горизонтальные или наклонные (рис. 2.1, а, б). Стойки могут быть сплошными или решетчаты-

ми. В качестве ригелей вместо балок могут использоваться фермы (рис. 2.1, в). Рама, как сочетание стоек и балок, была исторически первой конструкцией, используемой в строительстве.

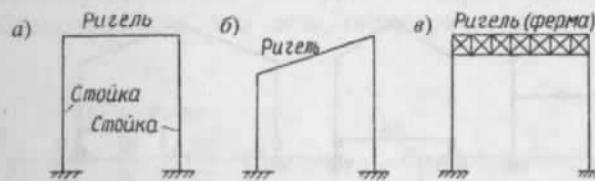


Рис. 2.1

Рамы разделяются на плоские и пространственные, однопролетные и многопролетные, одноэтажные и многоэтажные. Рамы образуют каркасы промышленных и гражданских зданий и сооружений, являются несущими частями этих сооружений и предназначены для восприятия внешних силовых воздействий.

На рис. 2.2, а изображен каркас двухэтажного здания в виде пространственной рамы, на рис. 2.2, б — ряд плоских однопролетных рам, образующих каркас одноэтажного цеха.

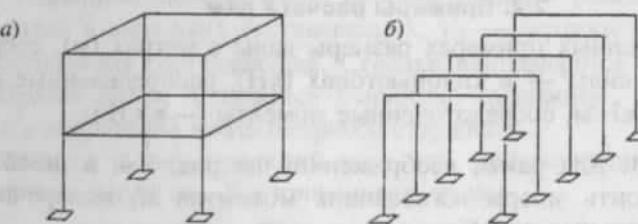
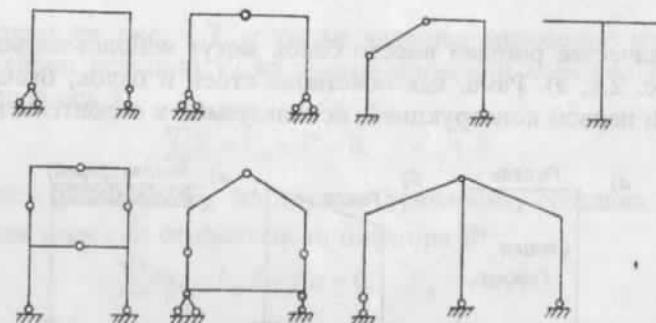


Рис. 2.2

Для изготовления элементов рам (стоеч и поперечных балок, называемых ригелями) используются железобетон, сталь, дерево.

Здесь рассматривается определение усилий в плоских статически определимых рамках. Рамы могут иметь разнообразную форму; некоторые из них изображены на рис. 2.3.

Перед расчетом рамы необходимо произвести кинематический анализ, чтобы убедиться в ее геометрической неизменяемости.



Puc. 2.

Процесс расчета рамы составляют следующие действия:

- 1) кинематический анализ;
  - 2) определение опорных реакций и их проверка;
  - 3) разбивка рамы на участки, запись уравнений внутренних усилий — изгибающих моментов  $M$ , поперечных сил  $Q$  и продольных сил  $N$  — для каждого участка, построение по уравнениям эпюров  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ;
  - 4) проверка результатов.

## 2.2. Примеры расчета рам

В приведенных примерах размеры даны в метрах (м), сосредоточенные силы — в килоньютонах (кН), распределенные нагрузки — в кН/м, сосредоточенные моменты — в кН·м.

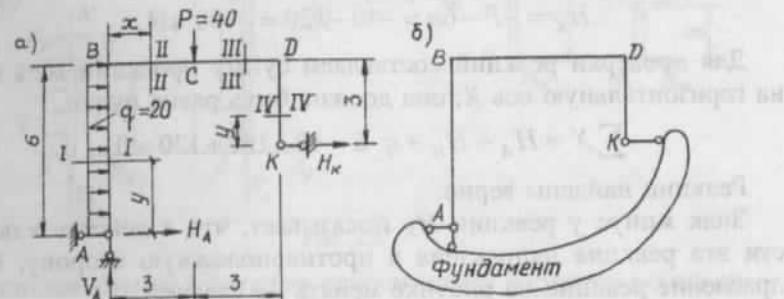
**Пример 1.** Для рамы, изображенной на рис. 2.4, *a*, необходимо построить эпюры изгибающих моментов  $M$ , поперечных сил  $Q$ , продольных сил  $N$ .

**1. Кинематический анализ.** Для анализа используем результаты п. 1.3. Рама состоит из одного диска  $ABDK$ , соединенного тремя опорными стержнями с фундаментом (с «землей»), поэтому в формуле (1.1) следует принять  $D = 1$ ,  $W = 0$ ,  $C_0 = 3$ , после чего получаем:

$$W = 2D - 2\mathcal{W} - C_0 = 3 \times 1 - 2 \times 0 - 3 \equiv 0$$

Таким образом, необходимое условие геометрической неизменяемости и статической определимости (1.3) выполняется.

Теперь убедимся в том, что рама собрана правильно. Принимая фундамент за диск (рис. 2.4, б), видим, что система состоит из двух дисков — фундамента и диска *ABDK*, соединенных тремя опорными стержнями, оси которых не пересекаются в одной точке. Следовательно, это есть геометрически неизменяемая система.



PUC, 24

**2. Определение опорных реакций.** Левая опора  $A$  рамы является шарнирно неподвижной опорой; полную реакцию в ней изобразим в виде двух составляющих:  $V_A$  — вертикальная,  $H_A$  — горизонтальная составляющая. Стрелки направляются произвольно. Правая опора  $K$  является шарнирно-подвижной, здесь реакция  $H_K$  направлена вдоль опорного стержня.

Запишем сумму проекций всех сил, действующих на раму, на вертикальную ось  $Y$  и приравняем нулю:

$$\sum Y = V_A - P = 0,$$

откуда получаем:  $V_A = P = 40 \text{ кН}$ .

Составим сумму моментов всех сил относительно опоры  $K$  и приравняем нулю:

$$\sum m_K = -V_A \cdot 6 + H_A \cdot 3 + P \cdot 3 = 0 ,$$

откуда имеем:

$$H_A = (6V_A - 3P) \frac{1}{3} = 2V_A - P = 40 \text{ kH.}$$

В уравнение моментов не вошла распределенная нагрузка  $q$ , так как ее равнодействующая проходит через опору  $K$  и не дает момента относительно точки  $K$ .

Из суммы моментов относительно опоры  $A$

$$\sum m_A = H_K \cdot 3 + q \cdot 6 \cdot 3 + P \cdot 3 = 0$$

получаем:

$$H_K = -P - 6q = -40 - 120 = -160 \text{ кН}.$$

Для проверки реакций составляем сумму проекций всех сил на горизонтальную ось  $X$ ; она должна быть равна нулю:

$$\sum X = H_A + H_K + q \cdot 6 = 40 - 160 + 120 = 0.$$

Реакции найдены верно.

Знак минус у реакции  $H_K$  показывает, что в действительности эта реакция направлена в противоположную сторону. Направление реакции на рисунке менять не следует.

**3. Развивка рамы на участки. Запись уравнений внутренних усилий. Построение эпюор  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .** Границей участков служат узлы рамы, точки приложения сосредоточенных сил и моментов, точки обрыва распределенной нагрузки. На нашей раме следует назначить 4 участка:  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DK$ .

Введем правило знаков для внутренних усилий (рис. 2.5).

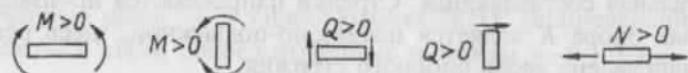


Рис. 2.5

**Изгибающий момент** считается положительным, если растягивает правые волокна стоек и нижние волокна балок (ригелей). Для наклонных элементов правило устанавливается расчетчиком.

**Поперечная сила** считается положительной, если вращает элемент, к которому приложена, по часовой стрелке.

**Продольная сила** положительна, если вызывает растяжение стержня. На рис. 2.5 показаны положительные направления внутренних усилий.

Запишем уравнения для  $M$ ,  $Q$  и  $N$ .

**Участок  $AB$ .** В произвольном месте на расстоянии  $y$  от опоры  $A$  сделаем сечение I-I и рассмотрим равновесие нижней (меньшей) отсеченной части. В сечении приложим усилия  $M$ ,  $Q$  и  $N$ , задав им положительные направления (рис. 2.6, а).

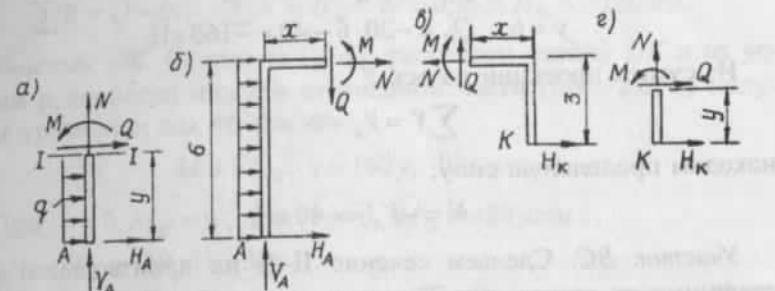


Рис. 2.6

Запишем сумму моментов относительно верхнего конца отсеченной части:

$$\sum m = M + qy \frac{y}{2} + H_A y = 0,$$

откуда получаем уравнение изгибающих моментов:

$$M = -H_A y - q \frac{y^2}{2} = -40y - 10y^2,$$

где  $y$  — переменная величина,  $0 \leq y \leq 6$ .

Видим, что изгибающие моменты на участке  $AB$  изменяются по закону квадратной параболы. Чтобы построить эпюру, необходимо вычислить три ординаты — в концевых сечениях участка при  $y = 0$ , при  $y = 6$  м и в середине при  $y = 3$  м:

$$y = 0, \quad M_A = 0;$$

$$y = 3, \quad M = -120 - 10 \cdot 9 = -210 \text{ кНм};$$

$$y = 6, \quad M_B = -240 - 10 \cdot 36 = -600 \text{ кНм}.$$

Из суммы проекций на ось  $X$

$$\sum X = H_A + qy + Q = 0$$

получаем уравнение поперечных сил:

$$Q = -qy - H_A = -20y - 40.$$

Поперечная сила изменяется по линейному закону. Вычислим значения  $Q$  в концевых сечениях:

$$y = 0, \quad Q_A = -H_A = -40 \text{ кН};$$

$$y = 6, \quad Q_B = -20 \cdot 6 - 40 = -160 \text{ кН}.$$

Из суммы проекций на ось  $Y$

$$\sum Y = V_A + N = 0$$

находим продольную силу:

$$N = -V_A = -40 \text{ кН}.$$

**Участок  $BC$ .** Сделаем сечение  $\Pi-\Pi$  на произвольном расстоянии  $x$  от левого узла  $B$  и рассмотрим равновесие левой отсеченной части (рис. 2.6, б).

Из суммы моментов относительно правого сечения

$$\sum m = -M + V_A x - H_A \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

получаем:

$$M = V_A x - 6H_A - 18q = -240 - 360 + V_A x = -600 + 40x, \quad (0 \leq x \leq 3).$$

Вычислим значения изгибающих моментов в концевых сечениях участка  $BC$ :

$$x = 0 \quad M_B = -600 \text{ кНм};$$

$$x = 3 \quad M_c = -600 + 120 = -480 \text{ кНм}.$$

Из суммы проекций на ось  $Y$

$$\sum Y = V_A - Q = 0$$

получаем:

$$Q = V_A = 40 \text{ кН}.$$

Из суммы проекций на ось  $X$

$$\sum X = N + H_A + q \cdot 6 = 0$$

имеем:

$$N = -H_A - 6q = -40 - 120 = -160 \text{ кН}.$$

**Участок  $CD$ .** Сделаем сечение  $\text{III-III}$  и из уравнений равновесия правой отсеченной части (рис. 2.6, в) получаем:

$$\sum m = M - H_K \cdot 3 = 0, \quad M = 3H_K = -3 \cdot 160 = -480 \text{ кНм};$$

$$\sum Y = Q = 0, \quad \sum X = H_K - N = 0; N = H_K = -160 \text{ кН}.$$

**Участок  $DK$ .** Сечением  $\text{IV-IV}$  рассекаем стойку  $DK$  и из условий равновесия нижней отсеченной части (рис. 2.6, г) получаем уравнения для  $M$ ,  $Q$  и  $N$ :

$$M = -H_K \cdot y = 160y, \quad (0 \leq y \leq 3).$$

При  $y = 0 \quad M_K = 0$ ; при  $y = 3 \quad M_D = 480 \text{ кНм}$ .

$$Q = -H_K = 160 \text{ кН}; \quad N = 0.$$

Эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  даны на рис. 2.7. Ординаты эпюры  $M$  откладывают со стороны растянутых волокон; ординаты эпюр  $Q$  и  $N$  — на произвольной стороне от оси. Однако по длине прямолинейного стержня ординаты с разными знаками откладываются по разные стороны от оси стержня. На эпюрах  $Q$  и  $N$  обязательно ставят знаки.

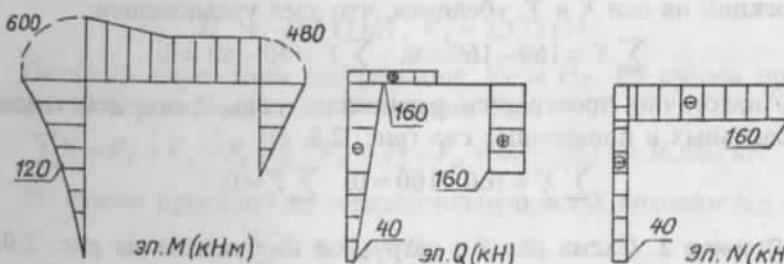


Рис. 2.7

**4. Проверка результатов.** Правильность проверяется по равновесию узлов. Вырежем узел  $B$  сечениями, бесконечно близкими к центру узла (рис. 2.8, а), приложим действующие в сечениях изгибающие моменты. Значения и направление моментов снимаем с эпюры  $M$ .

Составим сумму моментов относительно центра узла  $B$ ; продольные силы проходят через центр узла и в уравнение не войдут. Поперечные силы тоже не дадут момента, так как линии

их действия бесконечно близко проходят около центра узла. По этой причине продольные и поперечные силы, действующие в сечениях, на рис. 2.8, *a* не показаны. Запишем сумму моментов и получим:

$$\sum m_B = 600 - 600 = 0.$$

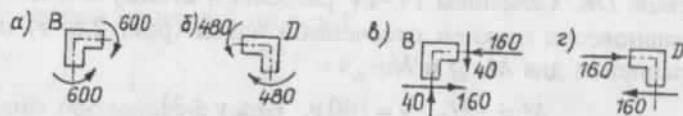


Рис. 2.8

Аналогичным образом проверяется равновесие узла *D* по моментам (рис. 2.8, *b*):

$$\sum m = 480 - 480 = 0.$$

Эпюры *Q* и *N* проверяются совместно тоже по равновесию узлов. Вырежем узел *B*, приложим продольные и поперечные силы (рис. 2.8, *c*), сняв их значения с эпюров, и, составив сумму проекций на оси *X* и *Y*, убедимся, что узел уравновешен:

$$\sum X = 160 - 160 = 0; \quad \sum Y = 40 - 40 = 0.$$

Аналогично проверяется равновесие узла *D* под действием продольных и поперечных сил (рис. 2.8, *d*):

$$\sum X = 160 - 160 = 0; \quad \sum Y = 0.$$

**Пример 2.** Схема рамы с нагрузкой изображена на рис. 2.9, *a*. Требуется построить эпюры внутренних усилий *M*, *Q* и *N*.

**1. Кинематический анализ.** Фундамент вместе с опорными стержнями в опорах *A* и *K* образуют один диск. Таким образом, имеем три диска — *AD*, *DK* и фундамент, соединенных тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (рис. 2.9, *b*; здесь шарнирно неподвижные опоры *A* и *K* изображены в виде одного шарнира). Степень свободы системы *W* = 0. Следовательно, система является геометрически неизменяемой и статически определимой.

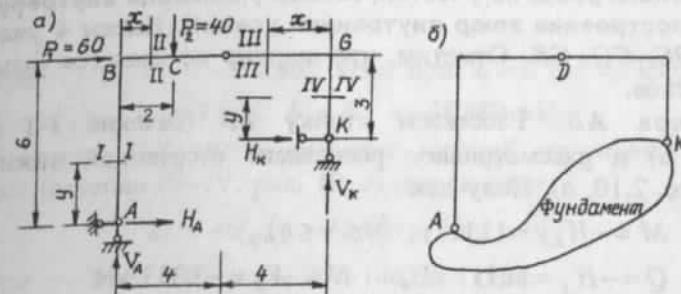


Рис. 2.9

**2. Определение реакций и их проверка.** Составим два уравнения равновесия — сумму моментов левых сил относительно шарнира *D* и сумму моментов всех сил относительно опорного шарнира *K*:

$$\sum m_D^{\text{лев}} = V_A \cdot 4 - H_A \cdot 6 - P_2 \cdot 2 = 4V_A - 6H_A - 80 = 0,$$

$$\sum m_K = V_A \cdot 8 - H_A \cdot 3 - P_2 \cdot 6 + P_1 \cdot 3 = 8V_A - 3H_A - 60 = 0.$$

Получили систему двух уравнений с двумя неизвестными реакциями. Из этой системы находим их:

$$H_A = -11,111 \text{ кН}, \quad V_A = 3,333 \text{ кН}.$$

Осталось определить две реакции: *V\_K* и *H\_K*. Из суммы проекций на вертикальную ось *Y* находим *V\_K*:

$$\sum Y = V_K + V_A - P_2 = 0, \quad V_K = P_2 - V_A = 40 - 3,333 = 36,667 \text{ кН}.$$

Из суммы проекций на горизонтальную ось *X* находим *H\_K*:

$$\sum X = H_K + H_A + P_1 = 0,$$

$$H_K = -H_A - P_1 = 11,111 - 60 = -48,889 \text{ кН}.$$

**Проверка реакций.** Составим сумму моментов правых сил относительно шарнира *D*:

$$\sum m_D^{\text{прав}} = V_K \cdot 4 + H_K \cdot 3 = 36,667 \cdot 4 - 48,889 \cdot 3 = 146,668 - 146,667 = 0,001.$$

Погрешность незначительна.

3. Разбивка рамы на участки, запись уравнений внутренних усилий, построение эпюр внутренних усилий. Имеем 4 участка:  $AB$ ,  $BC$ ,  $CG$ ,  $GK$ . Отметим, что шарнир не является границей участков.

**Участок  $AB$ .** Рассекаем стойку  $AB$  (сечение I-I на рис. 2.9, а) и рассматриваем равновесие отсеченной нижней части (рис. 2.10, а). Получаем:

$$M = -H_A y = 11,111 y, \quad (0 \leq y \leq 6),$$

$$Q = -H_A = 11,111 \text{ кН}, \quad N = -V_A = -3,333 \text{ кН}.$$

При  $y=0$   $M_A=0$ ; при  $y=6$   $M_B=66,666 \text{ кНм}$ .

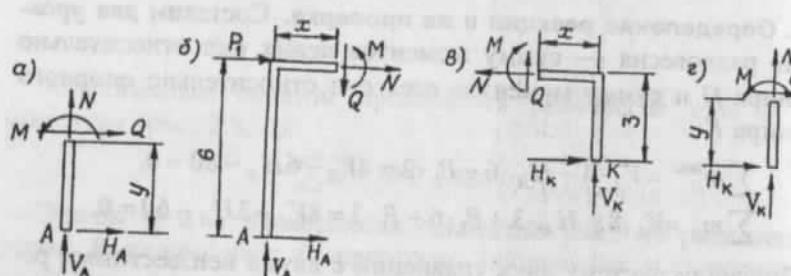


Рис. 2.10

**Участок  $BC$ .** Рассекаем участок  $BC$  (сечение II-II) и рассматриваем левую отсеченную часть (рис. 2.10, б). Получаем такие уравнения и значения:

$$M = V_A \cdot x - H_A \cdot 6 = 3,333 x + 66,666, \quad (0 \leq x \leq 2),$$

$$x=0 \quad M=66,666 \text{ кНм}; \quad x=2 \quad M=73,332 \text{ кНм},$$

$$Q = V_A = 3,333 \text{ кН}; \quad N = -H_A - P_i = 11,111 - 60 = -48,8889 \text{ кН}.$$

**Участок  $CG$ .** Отсекаем сечением III-III правую часть рамы и из условий ее равновесия находим (рис. 2.10, в):

$$\begin{aligned} M &= H_K \cdot 3 + V_K \cdot x_1 = -48,889 \cdot 3 + 36,667 x_1 = \\ &= 36,667 x_1 - 146,667, \quad (0 \leq x_1 \leq 6). \end{aligned}$$

Здесь  $x_1$  возрастает справа налево, принимая значение  $x_1 = 0$  в узле  $G$ .

При  $x_1 = 0$   $M_G = -146,667 \text{ кНм}$ ; при  $x_1 = 6$   $M = 73,335 \text{ кНм}$ ,  $Q = -V_K = -36,667 \text{ кН}$ ;  $N = H_K = -48,889 \text{ кН}$ .

**Участок  $GK$ .** Из равновесия нижней отсеченной части стойки (сечение IV-IV, рис. 10, г), определяем:

$$M = -H_K \cdot y = 48,889 y, \quad (0 \leq y \leq 3).$$

$$\text{При } y=0 \quad M=0; \quad y=3 \quad M=146,667 \text{ кНм};$$

$$Q = -H_K = 48,889 \text{ кН}; \quad N = -V_K = -36,667 \text{ кН}.$$

Эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  изображены на рис. 2.11.

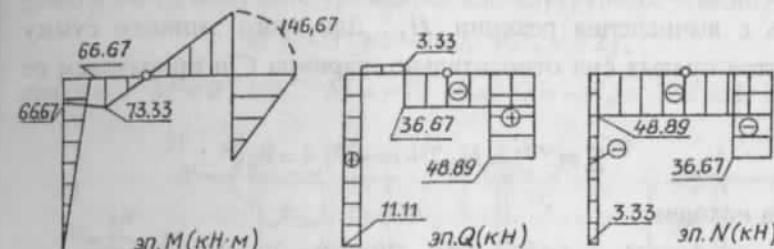


Рис. 2.11

4. Проверка эпюр  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ . Проверку эпюр производим, рассматривая равновесие узлов (рис. 2.12). Равновесие узлов выполняется.

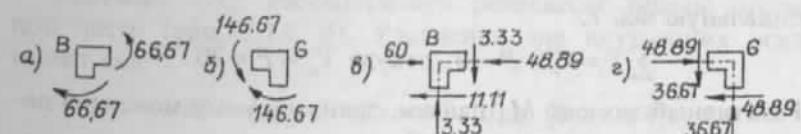


Рис. 2.12

Пример 3. Схема рамы с нагрузкой изображена на рис. 2.13.

1. Кинематический анализ. Фундамент вместе со стержнем ABC образует один диск. Всего имеем три диска – фундамент со стержнем ABC, стержень CDE и опорный стержень, соединенных тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой. Система геометрически неизменяема.

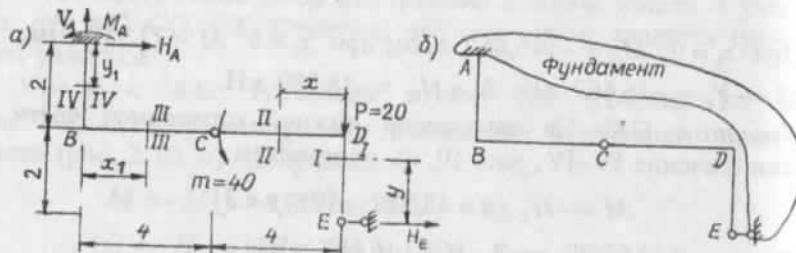


Рис. 2.13

**2. Определение опорных реакций.** В данном примере можно начать с вычисления реакции  $H_E$ . Для этого запишем сумму моментов правых сил относительно шарнира  $C$  и приравняем ее нулю:

$$\sum m_C^{\text{прав.}} = H_E \cdot 2 + m - P \cdot 4 = 0,$$

откуда находим:

$$H_E = -m/2 + 2P = -20 + 40 = 20 \text{ кН.}$$

Теперь можно найти вторую горизонтальную реакцию  $H_A$ , составив сумму проекций всех сил на горизонтальную ось  $X$ :

$$\sum X = H_A + H_E = 0, \text{ откуда } H_A = -H_E = -20 \text{ кН.}$$

Реакция  $V_A$  определяется из суммы проекций всех сил на вертикальную ось  $Y$ :

$$\sum Y = V_A - P = 0, \text{ откуда } V_A = P = 20 \text{ кН.}$$

Реактивный момент  $M_A$  найдем, записав сумму моментов левых сил относительно шарнира  $C$ :

$$\sum m_C^{\text{лев.}} = M_A - H_A \cdot 2 - V_A \cdot 4 = 0.$$

Из этого уравнения определяем:

$$M_A = 2H_A + 4V_A = -2 \cdot 20 + 4 \cdot 20 = -40 + 80 = 40 \text{ кНм.}$$

Для проверки составим сумму моментов всех сил относительно узловой точки  $D$ :

$$\sum m_D = M_A - H_A \cdot 2 - V_A \cdot 8 + m + H_E \cdot 2 =$$

$$= 40 + 2 \cdot 20 - 8 \cdot 20 + 40 + 2 \cdot 20 =$$

$$= 40 + 40 - 160 + 40 + 40 = 0.$$

Реакции найдены правильно.

**3. Разбивка на участки, запись уравнений внутренних усилий, построение эпюр внутренних усилий.** Имеем 4 участка:  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ . Стержень  $BD$  разбит на два участка, потому что справа от шарнира  $C$  приложен сосредоточенный момент  $m$ .

**Участок  $DE$ .** Из равновесия отсеченной нижней части (рис. 2.14, а) получаем уравнения для внутренних усилий:

$$M = -H_E y = -20y, \quad (0 \leq y \leq 2),$$

при  $y = 0 \quad M = 0, \quad y = 2 \quad M = -40 \text{ кНм}; \quad Q = -H_E = -20 \text{ кН}; \quad N = 0$ .

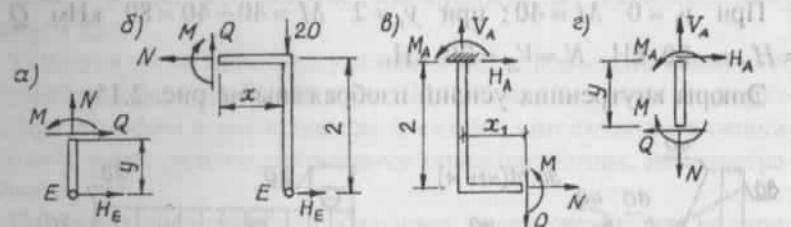


Рис. 2.14

**Участок  $DC$ .** Рассматриваем равновесие правой отсеченной части (рис. 2.14, б). Уравнения для внутренних усилий имеют вид:

$$M = +H_E \cdot 2 - Px = 40 - 20x, \quad (0 \leq x \leq 4).$$

При  $x = 0 \quad M = 40 \text{ кНм}, \quad x = 4 \quad M = 40 - 80 = -40 \text{ кНм}; \quad Q = 20 \text{ кН}, \quad N = H_E = 20 \text{ кН.}$

В данном случае в уравнении изгибающих моментов переменная величина  $x$  изменяется от  $x = 0$  в узле  $B$  до  $x = 4$  в шарнире  $C$ .

**Участок  $CB$ .** Из равновесия левой отсеченной части (рис. 2.14, в) находим:

$$M = -M_A + V_A x_1 + H_A \cdot 2 = -40 + V_A \cdot x_1 - 20 \cdot 2 = 20x_1 - 80, \\ (0 \leq x_1 \leq 4).$$

При  $x_1 = 0$   $M = -80$ ; при  $x_1 = 4$   $M = 20 \cdot 4 - 80 = 0$ ,  
 $Q = V_A = 20$  кН;  $N = -H_A = 20$  кН.

Отметим, что сосредоточенный внешний момент  $m$  не вошел в уравнение изгибающих моментов ни на участке  $DC$ , ни на участке  $BC$ . Однако это не означает, что его влияние на распределение усилий не учтено. Его влияние сказывается через реакции, которые найдены с учетом этого момента.

**Участок  $AB$ .** Верхняя отсеченная часть участка изображена на рис. 2.14, г. Из ее равновесия получаем:

$$M = M_A - H_A y_1 = 40 + 20y_1, \quad (0 \leq y_1 \leq 2).$$

При  $y_1 = 0$   $M = 40$ ; при  $y_1 = 2$   $M = 40 + 40 = 80$  кНм.  $Q = -H_A = -20$  кН,  $N = V_A = 20$  кН.

Эпюры внутренних усилий изображены на рис. 2.15.

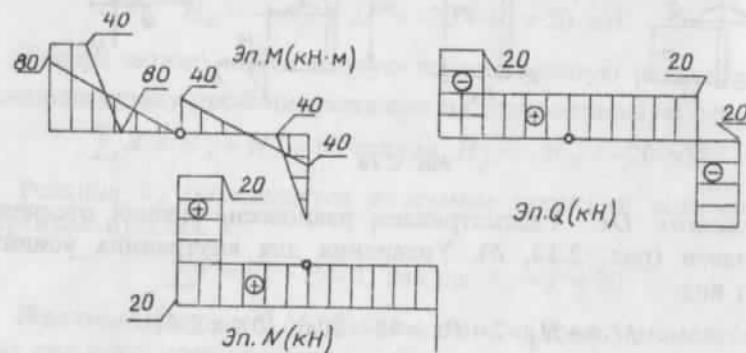


Рис. 2.15

**4. Проверка правильности эпюр  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .** Равновесие узлов по моментам, по поперечным и продольным силам выполняется (рис. 2.16).

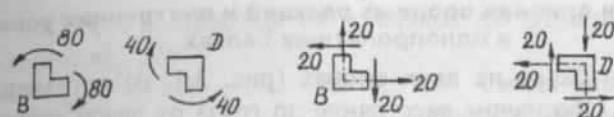


Рис. 2.16

### 3. ПОДВИЖНЫЕ НАГРУЗКИ И ТЕОРИЯ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ

#### 3.1. Общие сведения

С подвижными нагрузками приходится встречаться при расчетах мостов, кранов, подкрановых балок и других сооружений. Примерами подвижной нагрузки являются поезд, перемещающийся по железнодорожному мосту, кран, движущийся по подкрановой балке, автомобили, движущиеся по автодорожному мосту и др.

Усилия в элементах сооружения и их деформации зависят от положения подвижной нагрузки. Положение подвижной нагрузки, при котором в исследуемом элементе или сечении возникает наибольшее усилие, называется невыгоднейшим, или экстремальным.

Инженеру-расчетчику необходимо уметь определять экстремальные положения подвижной нагрузки и вычислять наибольшие усилия.

Отметим, что скорости и ускорения подвижной нагрузки во внимание не принимаются; считается, что нагрузка, перемещаясь, не вызывает появления динамических эффектов — ускорений масс конструкции и сил инерции.

Расчет конструкций на подвижную нагрузку производится с помощью линий влияния.

Линией влияния какой-либо величины (например продольного усилия в стержне фермы или изгибающего момента в сечении балки) называется график, показывающий закон изменения этой величины при движении по сооружению единичного вертикального груза  $P = 1$ . Линии влияния располагают обычно под рисунком конструкции. Каждая ордината линии влияния представляет собой численное значение исследуемой величины при нахождении подвижного груза над этой ординатой.

### 3.2. Линии влияния опорных реакций и внутренних усилий в однопролетных балках

Пусть по балке на двух опорах (рис. 3.1, а) перемещается груз  $P = 1$ . Обозначим расстояние до груза от левой опоры через  $x$ . Это расстояние изменяется от нуля, когда груз стоит над левой опорой  $A$ , до  $l$ , когда груз станет над правой опорой  $B$ . Найдем реакцию  $V_A$  из суммы моментов относительно опоры  $B$ :

$$\sum m_B = 0; V_A l - P(l-x) = 0,$$

откуда  $V_A = P(l-x)/l$ . Так как  $P = 1$ , то

$$V_A = \frac{l-x}{l}, (0 \leq x \leq l). \quad (3.1)$$

Следовательно, реакция  $V_A$  изменяется по линейному закону, так как переменная величина  $x$  входит в уравнение в первой степени.

При  $x = 0 V_A = 1$  (груз  $P = 1$  стоит над левой опорой);  
при  $x = l V_A = 0$  (груз  $P = 1$  стоит над правой опорой).

Линия влияния  $V_A$  изображена на рис. 3.1, б. Условимся впредь положительные ординаты откладывать вверх от оси абсцисс.

Построим линию влияния  $V_B$ . Для этого возьмем сумму моментов относительно левой опоры  $A$ :

$$\sum m_A = 0; V_B l - Px = 0, \text{ откуда}$$

$$V_B = \frac{Px}{l} = \frac{x}{l}, (0 \leq x \leq l). \quad (3.2)$$

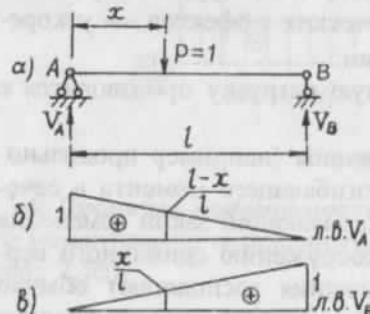


Рис. 3.1

Линия влияния  $V_B$  изображена на рис. 3.1, в.

Рассмотрим балку на двух опорах с консолями (рис. 3.2, а). Очевидно, что уравнения для реакций будут такими же, что и для балки без консолей (рис. 3.1). Поэтому линии влияния  $V_A$  и  $V_B$  для балки с консолями получим из аналогичных линий влияния  $V_A$  и  $V_B$  для балки без консолей

(рис. 3.1, б, в), продлив их графики до концов консолей (рис. 3.2, б, в).

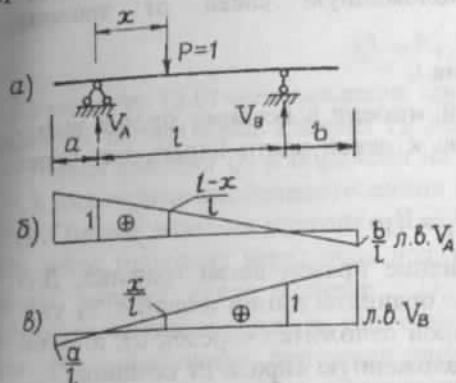


Рис. 3.2

Рассмотрим построение линий влияния внутренних усилий — изгибающих моментов и поперечных сил — в балке на двух опорах. Построим линию влияния изгибающего момента для сечения I на расстоянии  $a$  от левой опоры (рис. 3.3, а). Здесь необходимо рассмотреть два положения груза  $P = 1$  относительно сечения I.

#### 1. Груз $P = 1$ левее сечения I.

Изгибающий момент в сечении выразим через силы, приложенные к правой части балки, т.е. через реакцию  $V_B$ :

$$M_I = V_B(l-a). \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) есть уравнение левой ветви графика; чтобы построить эту ветвь, необходимо все ординаты линии влияния

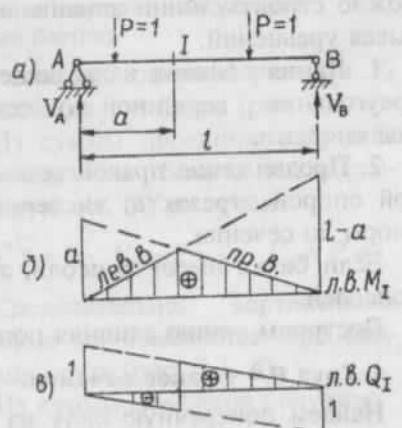


Рис. 3.3

смены знака ординат линии влияния показывает на изменение направления реакций. Например, крайняя правая ордината на линии влияния  $V_A$ , численно равная  $b/l$ , означает реакцию  $V_A$ , когда груз  $P = 1$  стоит на правом конце консоли; знак (-) означает, что при этом положении груза реакция в левой опоре  $V_A$  будет направлена вниз.

$V_B$  увеличить в  $(l - a)$  раз (при этом под правой опорой балки вместо единицы будет отложен отрезок  $(l - a)$ ), а затем выделить часть графика, расположенную слева от сечения (рис. 3.3, б).

### 2. Груз $P = 1$ правее сечения I.

В этом случае изгибающий момент в сечении проще выразить через силы, приложенные к левой части балки, т.е. через реакцию  $V_A$ :

$$M_1 = V_A a. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) есть уравнение правой ветви графика. Для ее построения необходимо все ординаты линии влияния  $V_A$  увеличить в  $a$  раз (под левой опорой отложится отрезок  $a$ ), а затем выделить часть графика, расположенную справа от сечения.

На рис. 3.3, б совмещены обе ветви линии влияния; точка пересечения ветвей находится под сечением I.

Следует запомнить характерные особенности, по которым можно строить линии влияния изгибающих моментов, не записывая уравнений:

1. Линия влияния изгибающего момента представляет собой треугольник с вершиной под сечением и нулевыми ординатами под опорами.

2. Продолжение правой ветви отсекает на вертикали под левой опорой отрезок  $a$ , численно равный расстоянию от левой опоры до сечения.

Если балка имеет консоли, то ветви продолжаются до концов консолей.

Построим линию влияния поперечной силы для сечения I.

### 1. Груз $P = 1$ левее сечения.

Найдем поперечную силу из равновесия правой отсеченной части:

$$Q_I = -V_B. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) есть уравнение левой ветви графика. Для ее построения необходимо «перевернуть» линию влияния  $V_B$  и выделить ту часть, что лежит левее сечения I.

### 2. Груз $P = 1$ правее сечения.

Поперечную силу найдем из равновесия левой отсеченной части:

$$Q_I = V_A. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) есть уравнение правой ветви графика; эта ветвь является частью линии влияния  $V_A$ , лежащей правее сечения.

Линия влияния  $Q_I$  изображена на рис. 3.3, в.

Характерные особенности линии влияния поперечной силы:

1. Линия влияния состоит из двух параллельных ветвей; левая ветвь проходит через ноль под левой опорой и отсекает отрезок, равный минус единице ( $-1$ ), под правой опорой; правая ветвь проходит через ноль под правой опорой и отсекает отрезок, равный единице, под левой опорой.

2. Линия влияния имеет скачок под сечением.

Отмеченные особенности построения линий влияния являются справедливыми для сечений, лежащих в пролете балки.

### 3.3. Линии влияния реакций и внутренних усилий в консольных балках

Построим линию влияния вертикальной опорной реакции  $V_A$  и опорного момента  $M_A$  в заделке консольной балки (рис. 3.4, а).

Из суммы проекций сил, действующих на балку, на вертикальную ось  $OY$  получим:

$$\sum Y = 0; \quad V_A - P = 0; \quad V_A = P = 1.$$

Следовательно, вертикальная реакция не изменяется при движении груза (рис. 3.4, б).

Из суммы моментов получим:

$$\begin{aligned} \sum m_A &= 0; \quad M_A + Px = 0; \\ M_A &= -x, \quad (0 \leq x \leq l). \end{aligned}$$

Реактивный момент изменяется по линейному закону. Когда груз  $P = 1$  находится в заделке ( $x = 0$ ), реактивный момент  $M_A = 0$ ; когда груз  $P = 1$  на конце консоли ( $x = l$ ),  $M_A = -l$  (рис. 3.4, в).

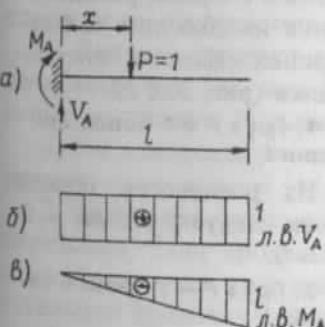


Рис. 3.4

Построим линию влияния изгибающего момента и поперечной силы для сечения I, находящегося на расстоянии  $a$  от заделки (рис. 3.5, a). Рассмотрим два положения груза относительно сечения I.

#### 1. Груз $P = 1$ левее сечения.

Из равновесия правой (консольной) части следует, что  $M_I = 0$ ,  $Q_I = 0$ .

Следовательно, левые ветви являются нулевыми.

#### 2. Груз $P = 1$ правее сечения.

Вновь рассмотрим равновесие правой части. Находим:

$$M_I = -Px = -x, \quad (0 \leq x \leq b),$$

$$Q_I = P = 1.$$

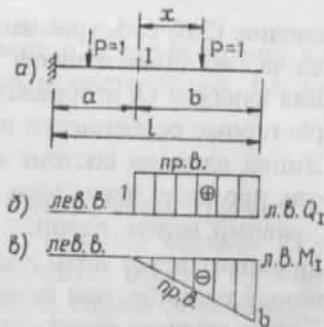
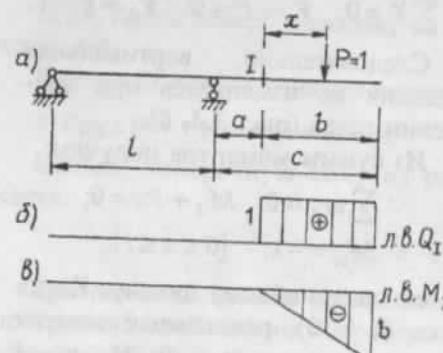


Рис. 3.5

Линии влияния  $M_I$  и  $Q_I$  изображены на рис. 3.5, б, в. Отличительной особенностью построения линий влияния для сечений, принадлежащих консольным балкам, является то, что внутренние усилия в сечении проще определять из равновесия отсеченной консольной (свободной) части, не содержащей опорных реакций.

Рассмотрим построение линий влияния изгибающих моментов и поперечных сил для сечения I, принадлежащего консольной части однопролетной шарнирной балки (рис. 3.6, а).



#### 1. Груз $P = 1$ левее сечения I.

Из равновесия правой части следует, что  $M_I = 0$ ,  $Q_I = 0$ .

#### 2. Груз $P = 1$ правее сечения I.

Вновь рассматриваем равновесие правой части и находим, что

$$M_I = -Px = -x, \quad (0 \leq x \leq b)$$

$$Q_I = P = 1.$$

Рис. 3.6

При  $x = 0$   $M_I = 0$  (груз  $P = 1$  в сечении I); при  $x = b$   $M_I = -b$  (груз на конце консоли).

Линии влияния  $M_I$  и  $Q_I$  изображены под балкой (рис. 3.6, б, в).

#### 3.4. Построение линий влияния при узловой передаче нагрузки

При построении линий влияния в 3.1–3.3 предполагалось, что подвижная нагрузка прикладывается непосредственно к балке. Однако в практике, например в мостовых конструкциях, нагрузка часто передается на балку в определенных местах через посредство других, вспомогательных балок — продольных и поперечных (рис. 3.7, а). Продольные однопролетные балки опираются на поперечные балки, поперечные — на основную (главную). В местах опирания поперечных балок нагрузка с продольной балки передается на главные. Такой способ передачи нагрузки называется узловым; сечения, где происходит опирание поперечных балок на главную, называются *передаточными узлами*. Участок балки между двумя соседними передаточными узлами называется *панелью*.

На рис. 3.7, б изображена упрощенная шарнирно-стержневая схема балочной системы.

Линии влияния при наличии узловой передачи нагрузки строятся по следующему правилу:

1. Вначале строится линия влияния без учета узловой передачи нагрузки, так, как будто нагрузка передается непосредственно на главную (основную) балку.

2. На построенную таким образом линию влияния проектируются передаточные узлы.

3. Проекции соседних узлов соединяются прямолинейными отрезками. Если продольная вспомогательная балка имеет консоли, то отрезки продолжаются до концов консолей этой вспомогательной продольной балки.

На рис. 3.7, в, г показаны линии влияния изгибающего момента и поперечной силы для сечения I, на рис. 3.7, д, е — для сечения II. Проекции передаточных узлов 1, 2, 3, 4 на линию влияния, построенную при передаче нагрузки непосредственно на главную балку (фрагменты этой линии влияния изображены штриховой линией), обозначены жирными точками 1, 2, 3, 4.

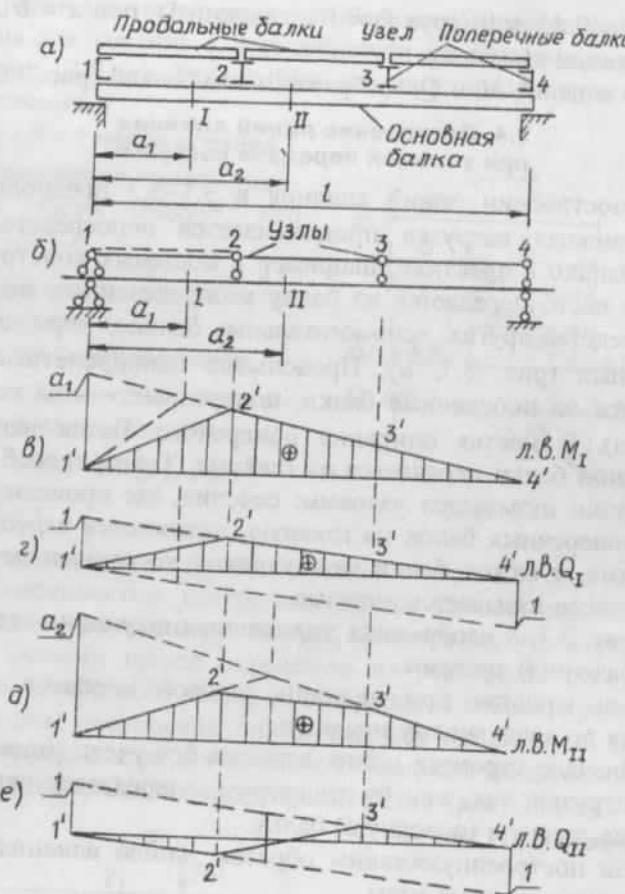


Рис. 3.7

### 3.5. Определение внутренних усилий от действия нагрузки с помощью линий влияния

Пусть на балку в сечении  $k$  действует сосредоточенная сила  $P_k$  (рис. 3.8, а). Предположим, что имеется линия влияния изгибающего момента для сечения I (рис. 3.8, б). Требуется найти изгибающий момент в сечении I от действия силы  $P_k$ .

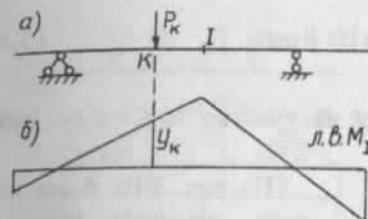


Рис. 3.8

Чтобы получить момент в сечении I от действия произвольной силы  $P_k$ , необходимо момент, вызванный единичной силой, увеличить в  $P_k$  раз:

$$M_1 = P_k y_k. \quad (3.7)$$

Если на балку действует система сосредоточенных сил  $P_1, P_2, \dots, P_n$  (например давление от колесных пар экипажа), тогда изгибающий момент в сечении I можно вычислить, используя принцип независимости действия сил, по формуле:

$$M_I = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_n y_n = \sum_1^n P_i y_i. \quad (3.8)$$

В этой формуле  $y_i$  есть ордината на линии влияния  $M_I$  под сечением балки, где приложена сосредоточенная сила  $P_i$  (рис. 3.9, б). Ординаты в формулу (3.8) подставляются со своими знаками.

Действие распределенной нагрузки  $q(x)$  на участке  $x_1 \leq x \leq x_2$  учитывается по формуле:

$$M_I = \int_{x_1}^{x_2} q(x) y(x) dx. \quad (3.9)$$

Если на балку действует распределенная нагрузка постоянной интенсивности  $q = const$  (рис. 3.10, а), тогда из формулы (3.9) получаем:

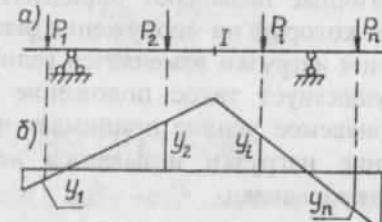


Рис. 3.9

$$M_1 = q \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx = q\omega, \quad (3.10)$$

где  $\omega$  — площадь линии влияния на участке  $x_1 \leq x \leq x_2$ , занимаемом нагрузкой  $q$ .

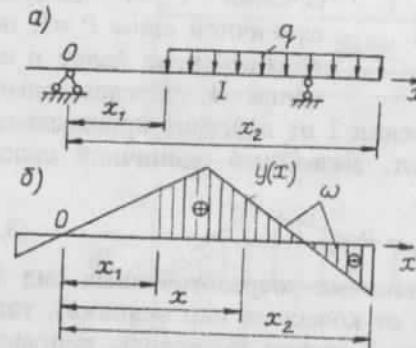


Рис. 3.10

Для упрощения вычислений внешнюю нагрузку над каждым прямолинейным участком линии влияния можно заменять равнодействующей.

### 3.6. Определение экстремального положения подвижной нагрузки

Приведенные в подразд. 3.5 формулы (3.7) – (3.10) и им аналогичные позволяют определять усилия от нагрузки, положение которой на сооружении известно. В зависимости от положения нагрузки изменяется величина усилия.

Существует такое положение нагрузки, при котором рассматриваемое усилие принимает наибольшее значение. Это положение нагрузки называется *невыгоднейшим, опасным, или экстремальным*.

1. Экстремальное положение сосредоточенных грузов в случае треугольной линии влияния.

Имеется линия влияния треугольной формы некой величины  $S$  и пакет связанных между собой грузов, расстояние между которыми при движении не меняется. Необходимо найти экс-

тремальное положение данной подвижной нагрузки (рис. 3.11, а).

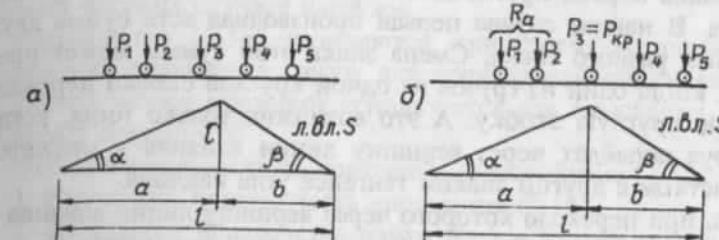


Рис. 3.11

Если бы у нас был один груз, то задача решалась бы просто — этот груз следовало бы поставить над вершиной линии влияния, где наибольшая ордината, и затем воспользоваться формулой (3.7).

В нашем случае задача несколько усложняется. На первый взгляд может показаться, что экстремальным будет такое положение грузов, когда их равнодействующая стоит над вершиной линии влияния. Но это решение было бы неверным, и в этом мы сейчас убедимся.

В соответствии с формулой (3.8) запишем:

$$S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4 + P_5 y_5. \quad (3.11)$$

Исследуем эту функцию на экстремум.

Найдем первую производную от функции (3.11):

$$\frac{dS}{dx} = P_1 \frac{dy_1}{dx} + P_2 \frac{dy_2}{dx} + P_3 \frac{dy_3}{dx} + P_4 \frac{dy_4}{dx} + P_5 \frac{dy_5}{dx}.$$

Так как

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx} = \frac{dy_3}{dx} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{dy_4}{dx} = \frac{dy_5}{dx} = \operatorname{tg}\beta,$$

то

$$\frac{dS}{dx} = (P_1 + P_2 + P_3) \operatorname{tg}\alpha + (P_4 + P_5) \operatorname{tg}\beta.$$

С учетом того, что  $\operatorname{tg}\alpha = c/a$ ,  $\operatorname{tg}\beta = -c/b$ , можем записать:

$$\frac{dS}{dx} = (P_1 + P_2 + P_3) \frac{c}{a} - (P_4 + P_5) \frac{c}{b}. \quad (3.12)$$

Необходимое и достаточное условие экстремума функции — смена знака первой производной при переходе через точку экстремума. В нашем случае первая производная есть сумма двух слагаемых разного знака. Смена знака этой суммы может произойти, когда один из грузов из одной круглой скобки перейдет в другую круглую скобку. А это возможно только тогда, когда этот груз перейдет через вершину линии влияния и окажется над участком с другим знаком тангенса угла наклона.

Груз, при переходе которого через вершину линии влияния  $S$  первая производная величины  $S$  меняет знак, называется *критическим*.

Следовательно, невыгоднейшим или экстремальным является такое положение нагрузки, когда один из грузов (критический) стоит над вершиной линии влияния. Наша задача — научиться находить этот критический груз.

Предположим, что в нашем случае критическим является третий груз при счете слева направо:  $P_{kp} = P_3$ . Обозначим через  $R_a$  сумму грузов, стоящих левее критического ( $R_a = P_1 + P_2$ ). Тогда формулу (3.12) можно записать так:

$$\frac{dS}{dx} = \left( R_a + P_{kp} \right) \frac{c}{a} - \left( \sum P - R_a - P_{kp} \right) \frac{c}{b}, \quad (3.13)$$

где  $\sum P$  есть сумма всех грузов ( $\sum P = P_1 + P_2 + \dots + P_5$ ).

Признак максимума функции (3.13) можно записать в виде двух неравенств. При сдвиге влево от экстремального положения:

$$\frac{dS}{dx} = \left( R_a + P_{kp} \right) \frac{c}{a} - \left( \sum P - R_a - P_{kp} \right) \frac{c}{b} > 0. \quad (3.14)$$

При сдвиге вправо от экстремального положения (при этом  $P_{kp}$  перейдет в (3.13) из левой круглой скобки в правую):

$$\frac{dS}{dx} = R_a \frac{c}{a} - \left( \sum P - R_a \right) \frac{c}{b} < 0. \quad (3.15)$$

Эти два неравенства (3.14) и (3.15) преобразуются к виду:

$$\text{сдвиг влево: } \left( R_a + P_{kp} \right) \geq \frac{a}{l} \sum P,$$

$$\text{сдвиг вправо: } R_a \leq \frac{a}{l} \sum P. \quad (3.16)$$

В окончательной записи знаки неравенств  $>$  и  $<$  заменены на  $\geq$  и  $\leq$  затем, чтобы формулы (3.16) были пригодны для различных частных случаев нагрузок.

Неравенства (3.16) называются критерием экстремального положения подвижных грузов для треугольной линии влияния. В данной записи критерий используется для отыскания максимального значения  $S$ .

Чтобы воспользоваться критерием, необходимо:

1. Вычислить правую часть неравенств (3.16).
2. Из второго неравенства найти  $R_a$ , т.е. сумму грузов, стоящую слева от вершины линии влияния.
3. Проверить выполнение первого неравенства. Затем следует найти  $\max S = \sum P_i y_i$ .

Для отыскания минимального значения  $S$  знаки неравенств в (3.16) следует изменить на обратные.

Пример. В шарнирной балке для сечения I найти наибольший изгибающий момент от действия пяти подвижных грузов (грузы даны в кН) (рис. 3.12, а).

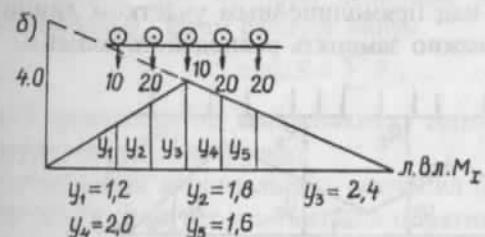
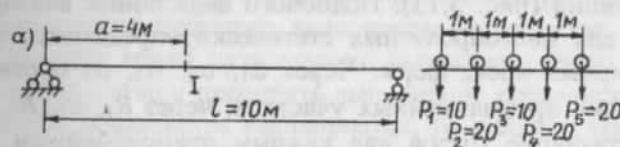


Рис. 3.12

Изобразим линию влияния  $M_I$  (рис. 3.12, б).  
Вычислим правую часть неравенств (3.16):

$$\frac{a}{l} \sum P = \frac{4}{10} \cdot 80 = 32.$$

Следовательно, левее вершины линии влияния (левее сечения I) следует поставить первые два груза  $P_1 = 10$  кН и  $P_2 = 20$  кН, так как их сумма

$$R_a = P_1 + P_2 = 30 < \frac{a}{l} \sum P = 32.$$

Критическим будет третий груз  $P_3 = 10$  кН. Первое неравенство в (3.16) при этом также будет удовлетворено:

$$R_a + P_{kp} = 30 + 10 > 32$$

Экстремальное положение грузов найдено (рис. 3.12, б). Теперь вычислим момент в сечении I:

$$\max M_I = \sum P_i y_i = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4 + P_5 y_5 = \\ = 10 \cdot 1,2 + 20 \cdot 1,8 + 10 \cdot 2,4 + 20 \cdot 2,0 + 20 \cdot 1,6 = 144 \text{ кНм.}$$

## 2. Экстремальное положение сосредоточенных грузов в случае многоугольной линии влияния.

Допустим, линия влияния некоторой величины  $S$  имеет вид ломаной линии (рис. 3.13). Подобного вида линии влияния характерны для многопролетных статически определимых балок, трехшарнирных арок, ферм. Через  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  обозначены углы наклона прямолинейных участков; через  $R_1, R_2, R_3, R_4$  — равнодействующие грузов над каждым прямолинейным участком (напомним, что над прямолинейным участком линии влияния систему грузов можно заменять равнодействующей).

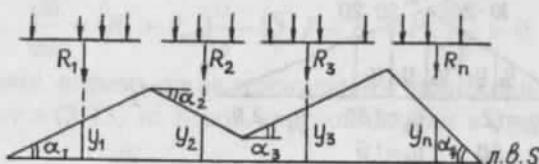


Рис. 3.13

Тогда величину  $S$  можно вычислить по формуле, аналогичной формуле (3.8):

$$S = R_1 y_1 + R_2 y_2 + R_3 y_3 + R_4 y_4, \quad (3.17)$$

где  $y_1, \dots, y_4$  — ординаты линии влияния  $S$  под равнодействующими.

Найдем производную от (3.17):

$$\frac{dS}{dx} = R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_3 \operatorname{tg} \alpha_3 + R_4 \operatorname{tg} \alpha_4 = \sum_1^4 R_i \operatorname{tg} \alpha_i. \quad (3.18)$$

Необходимо найти такое положение подвижных грузов, при котором производная, если грузы сдвинуть влево и вправо, меняла бы знак. Тогда критерий экстремального положения грузов для многоугольной линии влияния можно записать так:

$$\text{сдвиг влево: } \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i \geq 0,$$

$$\text{сдвиг вправо: } \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i \leq 0. \quad (3.19)$$

При этом один из грузов (критический) должен стоять над одной из вершин.

Чтобы воспользоваться критерием (3.19), необходимо:

1. Поставить грузы в испытываемое положение так, чтобы один из грузов стоял над одной из вершин линии влияния.

2. Сдвинуть грузы чуть влево, вычислить левую часть в первом неравенстве и проверить выполнение неравенства.

3. Сдвинуть грузы чуть вправо, вычислить левую часть во втором неравенстве и проверить выполнение неравенства.

Если оба неравенства выполняются, то найдено такое положение нагрузки, при котором величина  $S$  принимает максимальное значение. Затем следует найти

$$\max S = \sum R_i y_i.$$

Если неравенства не выполняются, тогда необходимо испытать другое положение грузов.

При отыскании минимального значения  $S$  знаки неравенств в критерии (3.19) следует изменить на обратные.

3. Экстремальное положение подвижной равномерно распределенной нагрузки.

При действии равномерно распределенной нагрузки величина  $S$  равна произведению интенсивности нагрузки  $q$  на площадь  $\omega$  линии влияния  $S$ , расположенной под нагрузкой, т.е.  $S = q\omega$ . Так как  $q = \text{const}$ , то величина  $S$  будет принимать наибольшее значение при наибольшем значении площади  $\omega$ . Следовательно, чтобы получить  $\max S$ , необходимо все положительные участки

линии влияния  $S$  загрузить распределенной нагрузкой. Чтобы получить  $\min S$ , необходимо загрузить распределенной нагрузкой все отрицательные участки линии влияния.

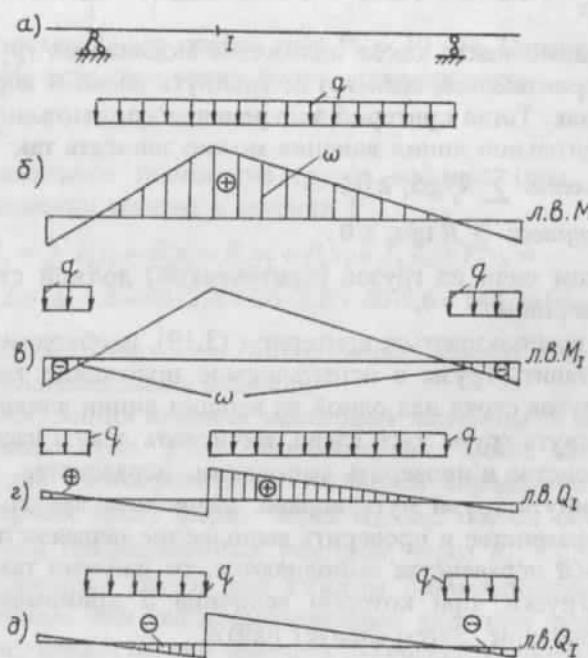


Рис. 3.14

На рис. 3.14, б показано загружение, соответствующее  $\max M_1$ ; загруженная положительная часть линии влияния  $M_1$  выделена штриховой. На рис. 3.14, в показано загружение, соответствующее  $\min M_1$ ; загруженная отрицательная часть линии влияния также отмечена штриховой.

На рис. 3.14, г показано загружение, соответствующее  $\max Q_1$ , на рис. 3.14, д — загружение, соответствующее  $\min Q_1$ .

### 3.7. Эквивалентная нагрузка

Эквивалентной называется такая нагрузка, равномерно распределенная по всей длине линии влияния, действие которой вызывает такое же усилие (например, в сечении балки или

в стержне фермы), какое возникает от подвижной нагрузки в ее экстремальном положении.

Эквивалентные нагрузки  $q_3$  применяются для треугольных линий влияния.

Эквивалентная нагрузка зависит от длины линии влияния  $l$ , от положения ее вершины  $\alpha = a/l$ , где  $a$  — проекция наименьшего расстояния от вершины до конца линии влияния, и от типа подвижной нагрузки. Имеются готовые таблицы эквивалентных нагрузок для различных типов электровозов, тепловозов, вагонов и т.д. при  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0,5$  и  $l = 1-200$  м. Для значений  $0 < \alpha < 0,5$  эквивалентная нагрузка определяется линейной интерполяцией. Таблицы приведены в соответствующих нормативных документах, например в СНиП 2.05.03 – 84 (табл. (3.1) и в «Указаниях по определению условий пропуска поездов по железнодорожным мостам».

С помощью эквивалентных нагрузок  $q_3$  максимальное усилие  $S$  вычисляется по формуле:

$$\max S = q_3 \omega, \quad (3.20)$$

где  $\omega$  — площадь треугольной линии влияния.

## 4. МНОГОПРОЛЕТНЫЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

### 4.1. Кинематический анализ

Многопролетной статически определимой или многопролетной шарнирной балкой называется статически определимая система, состоящая из однопролетных балок, соединенных между собой шарнирами.

Роль однопролетных балок могут выполнять балочные фермы, например, в мостовых конструкциях.

При кинематическом анализе многопролетных шарнирных балок степень свободы можно вычислять по формуле:

$$W = D - C_0 + 2, \quad (4.1)$$

где  $D$  — количество дисков (однопролетных балок);  $C_0$  — количество опорных стержней.

Необходимое условие геометрической неизменяемости и статической определимости:  $W = 0$  или

$$D = C_0 - 2. \quad (4.2)$$

Проверка на геометрическую и мгновенную изменяемость шарнирных многопролетных балок производится с использованием материала, изложенного в гл. I «Кинематический анализ сооружений».

**Пример.** Провести кинематический анализ схем, изображенных на рис. 4.1.

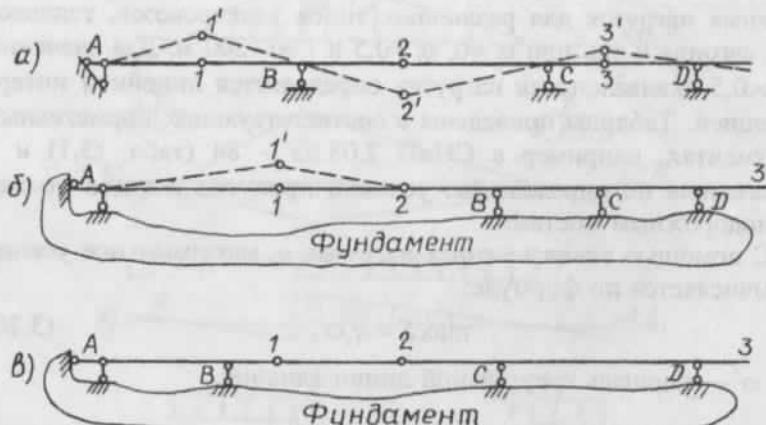


Рис. 4.1

**Схема №1** (рис. 4.1, а).  $D = 4$ ,  $C_0 = 5$ . Подставив  $D$  и  $C_0$  в формулу (4.2), видим, что равенства нет. По формуле (4.1) получаем:  $W = 4 - 5 + 2 = 1$ . Система имеет одну степень свободы — это механизм. Штриховой линией показано возможное изменение формы механизма.

**Схема №2** (рис. 4.1, б).  $D = 3$ ,  $C_0 = 5$ . При таких значениях  $D$  и  $C_0$  необходимое условие геометрической неизменяемости и статической определимости (4.2) выполняется. Но при внимательном рассмотрении схемы видим, что опорные стержни и шарниры расположены неверно. Действительно, в балке 2–3 один опорный вертикальный стержень является лишним. Кроме того, два диска A–1 и 1–2 соединяются с остальной частью системы — с фундаментом и с диском 2–3 — тремя шарнирами,

лежащими на одной прямой. Поэтому часть A–1–2 следует считать мгновенно изменяемой; в этой части возможны без деформации стержней перемещения шарнира 1 по вертикали. Здесь, в этой части, не хватает опорного вертикального стержня.

**Схема №3** (рис. 4.1, в).  $D = 3$ ,  $C_0 = 5$ . Условие (4.2) выполняется. Система собрана верно и является геометрически неизменяемой. Действительно, балка A–1 соединяется с фундаментом тремя стержнями, оси которых не пересекаются в одной точке; следовательно, эта балка образует вместе с фундаментом один жесткий диск. Этот диск соединяется с диском 2–3 также тремя стержнями: стержнем 1–2, опорными стержнями C и D, не пересекающимися в одной точке, — и образует геометрически неизменяемую систему.

#### 4.2. Определение усилий в многопролетных статически определимых балках от неподвижной нагрузки

Прежде всего необходимо выяснить взаимодействие отдельных частей, составляющих многопролетную шарнирную балку. Для этого в конструкции выделяют главную (основную) и второстепенные (подвесные) балки и изображают так называемую этажную схему.

На рис. 4.2, а изображена трехпролетная шарнирная балка, на рис. 4.2, б — ее этажная схема. Балка A–1 является главной, так как она может воспринимать любую нагрузку без помощи других частей системы; балка 1–2 является подвесной по отношению к балке A–1, так как левым концом она опирается на балку A–1; эта балка является главной по отношению к балке 2–3, так как она поддерживает последнюю; балка 2–3 является подвесной.

Нагрузка с главной балки на подвесную не передается; нагрузка же с подвесной балки всегда передается на ближайшую главную через соединительный шарнир. Поэтому расчет многопролетной шарнирной балки на неподвижную нагрузку всегда начинают с верхнего этажа, с рассмотрения последней подвесной балки, чтобы определить давление, которое передается с этой балки на ближайшую основную.

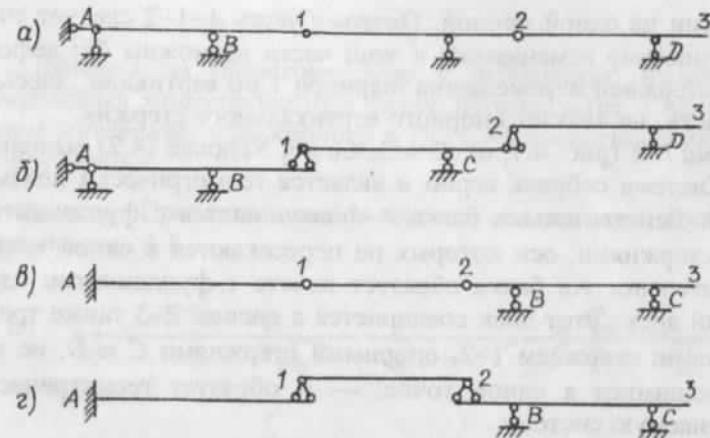


Рис. 4.2

На рис. 4.2, г изображена этажная схема балки, приведенной на рис. 4.2, в. Здесь имеется одна подвесная балка 1–2 и две основные балки А–1 и 2–3.

Порядок расчета многопролетных шарнирных балок на не-подвижную нагрузку составляют следующие действия:

1. Кинематический анализ.
2. Определение опорных реакций и сил взаимодействия отдельных элементов многопролетной балки между собой.
3. Разбивка отдельных балок на участки, построение эпюров изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$  по участкам.
4. Проверка результатов расчета.

**Пример.** Для трехпролетной балки, изображенной на рис. 4.3, а, построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил. Размеры даны в метрах (м); сосредоточенные силы в кН, распределенная нагрузка — в кН/м. Этажная схема балки показана на рис. 4.3, б.

**Кинематический анализ.** В нашем случае  $D = 3$ ,  $C_0 = 5$ . Необходимое условие статической определимости и геометрической неизменяемости (4.2) выполняется. Рассмотрим геометрическую структуру системы.

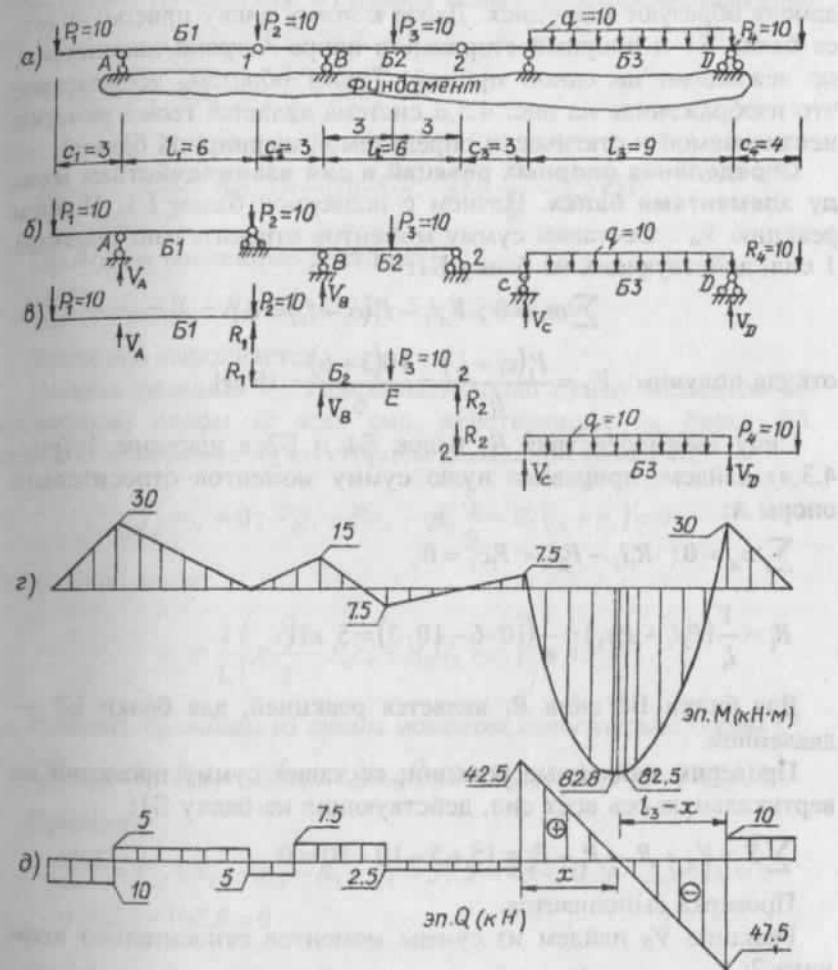


Рис. 4.3

Основная балка Б3 присоединяется к фундаменту тремя стержнями, оси которых не пересекаются в одной точке. Следовательно, эта балка вместе с фундаментом образует один жесткий диск. К этому диску присоединяются два стержня: балка Б2 и опорный стержень в опоре В — тремя шарнирами, не ле-

лежащими на одной прямой. Следовательно, балки Б3, Б2 и фундамент образуют один диск. Далее к этому диску присоединяется балка Б1 и опорный стержень в опоре А тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой. Таким образом, убеждаемся, что изображенная на рис. 4.3,а система является геометрически неизменяемой и статически определимой шарнирной балкой.

**Определение опорных реакций и сил взаимодействия между элементами балки.** Начнем с подвесной балки Б1. Найдем реакцию  $V_A$ . Составим сумму моментов относительно шарнира 1 сил, действующих на балку Б1:

$$\sum m_1 = 0; V_A l_1 - P_1(c_1 + l_1) = 0,$$

$$\text{откуда получим: } V_A = \frac{P_1(c_1 + l_1)}{l_1} = \frac{10(3+6)}{6} = 15 \text{ кН.}$$

Силу взаимодействия  $R_1$  балок Б1 и Б2 в шарнире 1 (рис. 4.3,в) найдем, приравняв нулю сумму моментов относительно опоры А:

$$\sum m_A = 0; R_1 l_1 - P_2 l_1 + P_1 c_1 = 0,$$

$$R_1 = \frac{1}{l_1}(P_2 l_1 - P_1 c_1) = \frac{1}{6}(10 \cdot 6 - 10 \cdot 3) = 5 \text{ кН.}$$

Для балки Б1 сила  $R_1$  является реакцией, для балки Б2 — давлением.

Проверим найденные реакции; составим сумму проекций на вертикальную ось всех сил, действующих на балку Б1:

$$\sum \bar{Y} = V_A + R_1 - P_1 - P_2 = 15 + 5 - 10 - 10 = 0.$$

Проверка выполняется.

Реакцию  $V_B$  найдем из суммы моментов относительно шарнира 2:

$$\sum m_2 = 0; V_B l_2 - R_1(l_2 + c_2) - P_3 \frac{l_2}{2} = 0,$$

$$V_B = \frac{1}{l_2} \left[ P_3 \frac{l_2}{2} + R_1(l_2 + c_2) \right] = \frac{1}{6}(10 \cdot 3 + 5 \cdot 9) = \frac{75}{6} = 12,5 \text{ кН.}$$

Реакцию  $R_2$  получим из суммы моментов относительно опоры В:

$$\sum m_B = 0; R_2 l_2 - P_3 \frac{l_2}{2} + R_1 c_2 = 0;$$

$$R_2 = \frac{1}{l_2} \left[ P_3 \frac{l_2}{2} - R_1 c_2 \right] = \frac{1}{6}(10 \cdot 3 - 5 \cdot 3) = \frac{75}{6} = 2,5 \text{ кН.}$$

Проверим найденные реакции:

$$\sum \bar{Y} = V_B - R_1 + R_2 - P_3 = 12,5 - 5 + 2,5 - 10 = 0.$$

Проверка выполняется.

Найдем реакцию  $V_c$ . Приравняем нулью сумму моментов относительно опоры D всех сил, действующих на балку Б3, включая и давление  $R_2$  со стороны подвесной балки Б2:

$$\sum m_D = 0; V_c l_3 + P_3 c_4 - q l_3^2 / 2 - R_2(l_3 + c_3) = 0,$$

откуда получаем:

$$V_c = \frac{1}{l_3} \left( q \frac{l_3^2}{2} - P_3 c_4 + R_2(l_3 + c_3) \right) = 45 \text{ кН.}$$

Реакцию  $V_D$  найдем из суммы моментов относительно опоры C:

$$\sum m_C = 0; V_D l_3 - P_4(c_4 + l_3) - q l_3^2 / 2 + R_2 c_3 = 0, V_D = 57,7 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \sum \bar{Y} &= V_D + V_c - q l_3 - R_2 - P_4 = 57,5 + 45 - 10 \cdot 9 - 2,5 - 10 = \\ &= 102,5 - 102,5 = 0. \end{aligned}$$

**Построение эпюр изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$ .**

**Балка Б1.** Балку следует разбить на два участка — один участок левее опоры А (консольная часть), другой — правее опоры А до шарнира 1. В пределах каждого из этих участков, исключая концевые сечения, нагрузок нет, поэтому на каждом из участков эпюра изгибающих моментов будет изменяться по

линейному закону, проходя через нулевые точки в левом концевом сечении балки и в шарнире I. Чтобы построить эпюру изгибающих моментов, достаточно вычислить ординату в сечении над опорой A. Эту ординату можно вычислить от силы  $P_1$  на левом конце балки:

$$M_A = -P_1 C_1 = -10 \cdot 3 = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Знак (-) принят потому, что при изгибе растягиваются верхние волокна балки, а нижние сжимаются.

Поперечная сила слева от опоры A:

$$Q = -P_1 = -10 \text{ кН},$$

справа от опоры A:

$$Q = -P_1 + V_A = 10 + 15 = 5 \text{ кН}.$$

**Балка Б2.** Здесь имеем три участка — один слева от опоры B (консоль) и два справа от опоры. Точка приложения силы  $P_3$  делит пролет балки Б2 на два участка. На каждом из участков эпюра моментов будет изменяться по линейному закону, нулевые ординаты эпюр известны — в шарнире I и шарнире 2. Вычислить необходимо две ординаты — в сечении под опорой B:

$$M_B = -R_1 C_2 = -5 \cdot 3 = -15 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

в сечении E, где приложена сила  $P_3$ :

$$M_E = R_2 \cdot 3 = 2,5 \cdot 3 = 7,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Поперечная сила на участке слева от опоры B:

$$Q = -R_1 = 5 \text{ кН},$$

справа от опоры:  $Q = -R_1 + V_B = -5,0 + 12,5 = 7,5 \text{ кН}$ ,

на участке правее силы  $P_3$ :

$$Q = -R_2 = -2,5 \text{ кН}.$$

**Балка Б3.** Имеем три участка. На левой консольной части балки эпюра моментов будет иметь вид прямой, имеющей нулевую ординату в концевом сечении и ординату в сечении под опорой C, равную:

$$M_C = -R_2 C_3 = -2,5 \cdot 3 = -7,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На участке между опорами C и D эпюра моментов будет иметь вид квадратной параболы. Для построения эпюры необходимо вычислить три ординаты — по концам участка и в средине. В сечении над опорой C ордината уже имеется, в сечении над опорой D

$$M_D = -P_4 C_4 = -10 \cdot 3 = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ординату в среднем сечении участка найдем как сумму моментов сил, приложенных слева от сечения:

$$M_{\text{ср}} = -R_2 (C_3 + l_3 / 2) + V_c l_3 / 2 - q l_3^2 / 8 = 82,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На правой консоли эпюра изгибающих моментов имеет вид прямой, проходящей через ноль в крайнем правом сечении и отсекающей ординату  $M_D = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}$  в сечении над опорой D. Эпюра изгибающих моментов изображена на рис. 4.3, г.

Поперечные силы на консольных участках балки Б3 постоянны и равны:

$$\text{на левой консоли } Q = R_2 = -2,5 \text{ кН};$$

$$\text{на правой консоли } Q = P_4 = 10 \text{ кН}.$$

В пролете между опорами поперечная сила изменяется по линейному закону. Чтобы построить эпюру на этом участке, достаточно вычислить значения поперечной силы в двух сечениях — справа от опоры C:

$$Q = -R_2 + V_C = -2,5 + 45 = 42,5 \text{ кН},$$

справа от опоры D:

$$Q = P_4 - V_D = 10 - 57,5 = -47,5 \text{ кН}.$$

Эпюра поперечных сил изображена на рис. 4.3, д. Расчетчику интересует наибольший изгибающий момент. Он находится, как это следует из эпюры моментов, в пролете балки Б3. Из дифференциальной зависимости Журавского

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

следует, что максимальный момент находится в том сечении балки, где поперечная сила  $Q = 0$ . Найдем это сечение. Обозна-

чим через  $x$  расстояние от опоры  $C$  до сечения, где поперечная сила обращается в ноль (рис. 4.3,  $d$ ). Составим пропорцию:

$$\frac{x}{42,5} = \frac{l_3 - x}{47,5},$$

из которой найдем:  $x = 4,25$  м.

Изгибающий момент в этом сечении:

$$\begin{aligned}\max M &= -R_2(3+x) + V_C x - qx^2/2 = \\ &= -2,5(3+4,25) + 45 \cdot 4,25 - 10 \cdot 4,25^2/2 = 82,81 \text{ кНм}.\end{aligned}$$

*Проверка* результатов расчета состоит в сопоставлении между собой схемы балки, эпюров  $M$ ,  $Q$  и действующей нагрузки.

В шарнирах изгибающие моменты должны быть равны нулю. В сечениях, где приложены сосредоточенные силы или реакции, на эпюре  $M$  должны быть вершины, направленные острием в сторону действия сил, на эпюре  $Q$  — скачки, равные по величине внешней силе или реакции. На участках с линейным изменением моментов поперечные силы должны быть постоянны и равны тангенсу угла наклона эпюры моментов. На участках с распределенной нагрузкой эпюра моментов должна быть криволинейной, направленной выпуклостью в сторону действия нагрузки; на этих же участках поперечная сила должна изменяться по линейному закону.

Все перечисленные условия на построенных эпюрах соблюдаются.

#### 4.3. Линии влияния внутренних усилий и реакций для многопролетных статически определимых балок

При построении линий влияния следует помнить:

1. Начинать построение необходимо с рассмотрения движения груза  $P = 1$  по основной балке.
2. Когда груз перемещается по основной балке, подвесные балки в «работу» не включаются, т.е. в них не возникают ни реакции в опорах, ни внутренние усилия в сечениях.
3. Линия влияния в пределах подвесных балок, которым не принадлежит исследуемое сечение, изменяется по линейному закону непрерывно по всей длине балки; при этом, если под-

весная балка имеет связь с фундаментом, линия влияния имеет нулевую ординату под опорой, стоящей на фундаменте.

**Пример 1.** Для балки, изображенной на рис. 4.4,  $a$ , построить линии влияния опорных реакций  $M_A$ ,  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $V_C$ , изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$  для сечений I, II, III.

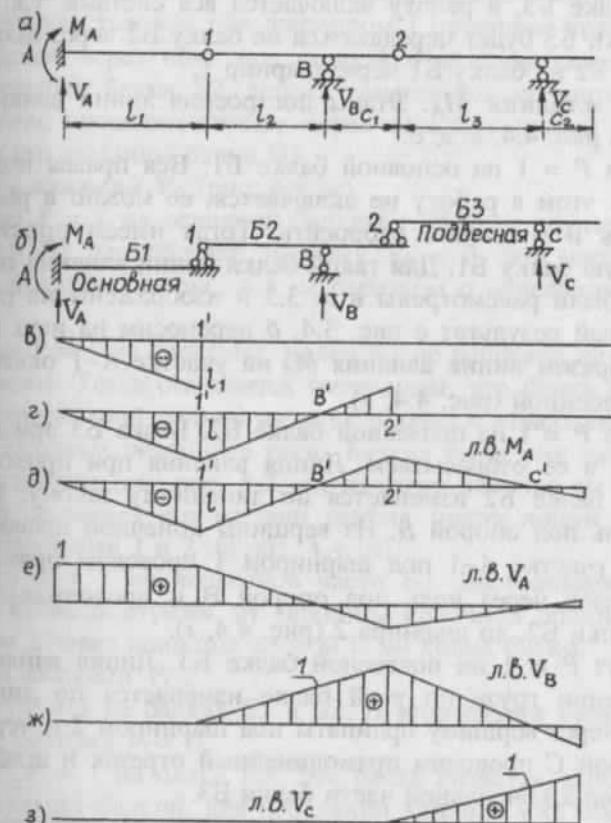


Рис. 4.4

На рис. 4.4,  $b$  изображена этажная схема балки, из которой видно, что Б1 является основной балкой, Б2 — подвесной для Б1 и основной для Б3; Б3 — подвесная балка.

Следовательно, когда груз  $P = 1$  будет проходить по балке Б1, обе подвесные в работу включаться не будут. Когда груз будет проходить по балке Б2, в работу будет включаться сама балка Б2 и балка Б1, так как давление с балки Б2 будет передаваться через шарнир на балку Б1. При этом балка Б3 «работать» не будет. И, наконец, когда груз  $P = 1$  проходит по подвесной балке Б3, в работу включается вся система, т.к. давление с балки Б3 будет передаваться на балку Б2 через шарнир 2, а с балки Б2 на балку Б1 через шарнир 1.

**Линия влияния  $M_A$ .** Этапы построения линии влияния показаны на рис. 4.4, в, г, д.

1. Груз  $P = 1$  на основной балке Б1. Вся правая подвесная часть при этом в работу не включается, ее можно в расчет не принимать и мысленно отбросить. Тогда имеем просто одну консольную балку Б1. Для такой балки линии влияния опорных реакций были рассмотрены в п. 3.3 и изображены на рис. 3.4. Полученный результат с рис. 3.4, б переносим на наш график. Таким образом линия влияния  $M_A$  на участке А–I оказывается уже построенной (рис. 4.4, в).

2. Груз  $P = 1$  на подвесной балке Б2. Балка Б3 при этом не работает, и ее отбрасываем. Линия влияния при прохождении груза по балке Б2 изменяется по линейному закону, проходя через ноль под опорой В. Из вершины конечной правой ординаты на участке А–I под шарниром 1 проводим прямолинейный отрезок через ноль под опорой В и продолжаем его до конца балки Б2, до шарнира 2 (рис. 4.4, г).

3. Груз  $P = 1$  на подвесной балке Б3. Линия влияния при прохождении груза по этой балке изменяется по линейному закону. Через вершину ординаты под шарниром 2 и через ноль под опорой С проводим прямолинейный отрезок и продолжаем его до конца консольной части балки Б3.

Вся линия влияния в окончательном виде представлена на рис. 4.4, д.

**Линия влияния  $V_A$  (рис. 4.4, е).**

1. Груз  $P = 1$  на основной балке Б1. Вся правая часть при этом не работает, ее можно мысленно отбросить. В таком случае мы имеем простую балку в виде консоли. Для такой балки линии влияния опорных реакций были уже рассмотрены в

54

п. 3.3 и построены (рис. 3.4). Используем полученный результат, переносим его на наш график (часть линии влияния под балкой Б1 на рис. 4.4, е).

2. Груз  $P = 1$  на подвесных балках Б2 и Б3. В этом случае линия влияния изменяется по линейным законам, проходя через нулевые точки под опорами В и С. Из вершины конечной ординаты на участке А–I под шарниром 1 проводим прямолинейный отрезок через ноль под опорой В и продолжаем его до конца консоли балки Б2, затем, изменив под шарниром 2 наклон линии, проводим отрезок через ноль под опорой С и продолжаем его до конца балки Б3.

**Линия влияния  $V_B$  (рис. 4.4, ж).**

1. Груз  $P = 1$  на основной балке Б1. В этом случае подвесная балка Б2 не работает, поэтому  $V_B = 0$ . Эта часть линии влияния показана на рис. 4.4, ж отрезком с нулевыми ординатами.

2. Груз  $P = 1$  на балке Б2. Балка Б3 не работает, ее мысленно отбросим. Тогда становится очевидным, что балка Б2 является однопролетной балкой на двух опорах с консолью. Линии влияния опорных реакций в таких балках были уже рассмотрены и построены (см. рис. 3.2, в), поэтому используем готовый результат, перенеся его на наш график (часть линии влияния между шарнирами 1 и 2 на рис. 4.4, ж).

3. Груз  $P = 1$  на подвесной части Б3. Достраиваем линию влияния, проводя отрезок от вершины конечной ординаты под шарниром 2 через ноль под опорой С до конца балки.

**Линия влияния  $V_C$ .**

1. Груз  $P = 1$  на балках Б1 и Б2. В этом случае балка Б3 не работает, поэтому  $V_C = 0$ .

2. Груз  $P = 1$  на балке Б3. Эта балка является однопролетной шарнирной балкой; для нее линии влияния уже построены (см. рис. 3.2), поэтому используем готовый результат. Перенесем линию влияния  $V_B$  с рис. 3.2, в, убрав отрезок под левой консолью. Линия влияния  $V_C$  изображена на рис. 4.4, з.

**Линия влияния  $M_I$ ,  $Q_I$ .** Сечение I принадлежит основной консольной балке Б1 (рис. 4.5, а).

1. Груз  $P = 1$  на основной балке Б1. Линии влияния  $M$  и  $Q$  для подобной балки изображены на рис. 3.5. Переносим их, за-

менив на линии влияния момента (рис. 3.5, б) ординату ( $b$ ) на ( $b_1$ ).

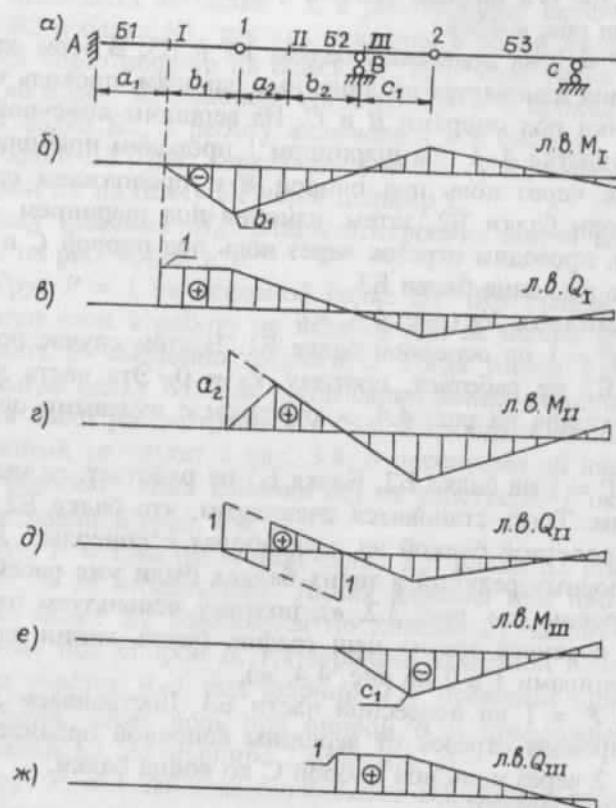


Рис. 4.5

2. Груз  $P = 1$  на подвесных балках Б2 и Б3. Проводим отрезки прямых через нули под опорами В и С, продолжая их до концов консолей (аналогично тому, как строились линии влияния  $M_A$  и  $V_A$ ).

Линии влияния  $M_I$  и  $Q_I$  изображены на рис. 4.5, б, в.

Линии влияния  $M_{II}$ ,  $Q_{II}$ , (рис. 4.5, г, д).

1. Груз  $P = 1$  на основной балке Б1. Так как сечение II принадлежит подвесной балке Б2, которая при таком положении

груза не работает, то линии влияния  $M_{II}$  и  $Q_{II}$  имеют нулевые ординаты под балкой Б1 на участке А–1.

2. Груз  $P = 1$  на балке Б2. Балка Б3, как подвесная, не работает, ее мысленно отбрасываем. Балка Б2 есть простая шарнирная однопролетная балка, сечение II находится в пролете. Линии влияния изгибающих моментов и поперечных сил для таких балок и таких сечений были рассмотрены в п. 3.2 и изображены на рис. 3.3. Перенесем их на наш график, продлив правые ветви (справа от сечения II) до конца консоли, до шарнира 2.

3. Груз  $P = 1$  на балке Б3. Продлляем линии влияния от шарнира 2, проведя отрезки через вершину ординаты под шарниром 2 и нулевую точку под опорой С до конца балки.

#### Линии влияния $M_{III}$ , $Q_{III}$ (рис. 4.5, е, ж).

1. Груз  $P = 1$  на основной балке Б1. Сечение III принадлежит подвесной балке Б2, поэтому линии влияния на участке А–1 под балкой Б1 имеют нулевые ординаты.

2. Груз  $P = 1$  на подвесной балке Б2. Балка Б3 является подвесной по отношению к балке Б2, поэтому ее в расчет не принимаем и мысленно удаляем. Сечение III принадлежит консольной части балки Б2. Для таких сечений линии влияния были рассмотрены в п. 3.3 и изображены на рис. 3.6. В нашем случае исследуемое сечение III располагается непосредственно около опоры, справа от нее, поэтому линии влияния, приведенные на рис. 3.6, соответствующим образом преобразованы и перенесены на наш график.

3. Груз  $P = 1$  на подвесной балке Б3. Завершаем построение линий влияния, проведя прямолинейные отрезки через вершины крайних ординат под шарниром 2 и через ноль под опорой С.

**Пример 2.** Для балки, изображенной на рис. 4.6, а, построить линии влияния опорных реакций  $M_A$ ,  $V_B$ , изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$  для сечений I и II.

На рис. 4.6, б изображена этажная схема балки, из которой видно, что Б1 и Б3 являются главными балками, так как обе эти балки могут восприниматься самостоятельно вертикальную нагрузку. Связывает эти две балки подвесная балка Б2. Когда груз  $P = 1$  на основной балке Б1, то подвесная Б2 не работает, не работает и балка Б3, и наоборот, когда груз  $P = 1$  на основ-

ной балке Б3, то не работает балка Б1 вместе с подвесной Б2. Когда груз на подвесной балке Б2, в работу включается вся система, так как давление с балки Б2 передается через шарниры 1 и 2 на основные балки Б1 и Б3.

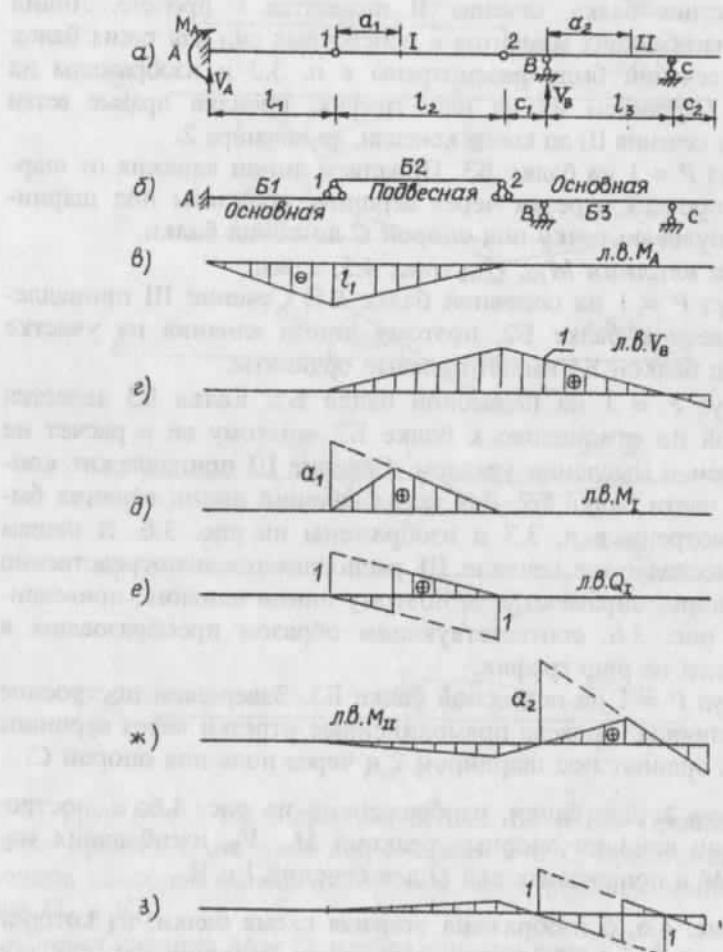


Рис. 4.6

#### Линии влияния $M_A$ (рис. 4.6, в).

1. Груз  $P = 1$  на основной балке Б1. Правую часть Б2 и Б3 мысленно отбрасываем, тогда имеем консольную балку, для которой линия влияния опорного момента уже была построена (см. рис. 3.4, в). Переносим этот результат на наш график, заменив ординату  $l$  на  $l_1$ .

2. Груз  $P = 1$  на основной балке Б3. В этом случае  $M_A = 0$ , и мы имеем на графике под балкой Б3 нулевые ординаты.

3. Груз  $P = 1$  на подвесной балке Б2. Используя правило построения линий влияния при узловой передаче нагрузки (нагрузка с балки Б2 передается на балки Б1 и Б3 через узлы 1 и 2), соединяем ординаты под узлом 1 и узлом 2 прямолинейным отрезком.

#### Линии влияния $V_B$ (рис. 4.6, г).

1. Груз  $P = 1$  на основной балке Б1. Балка Б3 не работает, поэтому  $V_B = 0$  и на графике под балкой Б1 имеем нулевые ординаты.

2. Груз  $P = 1$  на основной балке Б3. Если подвесную, как неработающую, отбросить, то балка Б3 — это балка на двух опорах; для ее линии влияния опорных реакций были построены (см. п. 3.2 и рис. 3.2). Переносим рис. 3.2, б на наш график.

3. Груз  $P = 1$  на подвесной балке Б2. Соединяем ординаты под шарнирами 1 и 2 прямолинейным отрезком, следуя правилу построения линии влияния при узловой передаче нагрузки.

#### Линия влияния $M_I$ (рис. 4.6, д).

1. Груз  $P = 1$  на главной балке Б1 или Б3. Подвесная Б2 не работает, поэтому график под балками Б1 и Б3 имеет нулевые ординаты.

2. Груз  $P = 1$  на балке Б2. Это шарнирная балка на двух опорах, сечение находится в пролете. Для таких балок и таких сечений линии влияния уже были построены (см. п. 3.2 и рис. 3.3). Переносим рис. 3.3, б на наш график, заменив отрезок  $a$  на  $a_1$ .

#### Линия влияния $Q_I$ (рис. 4.6, е).

Строится аналогично линии влияния  $M_I$  с использованием готового результата, изображенного на рис. 3.3, в.

#### Линия влияния $M_{II}$ (рис. 4.6, ж).

1. Груз  $P = 1$  на основной балке Б1. Балка Б3 не работает, поэтому  $M_{II} = 0$ .

2. Груз  $P = 1$  на балке БЗ. Балка БЗ является шарнирной балкой на двух опорах, сечение II находится в пролете этой балки. Используем результат п. 3.2 — переносим рис. 3.3, б на наш график, заменив отрезок  $a$  на  $a_2$ .

3. Груз  $P = 1$  на балке Б2. Соединяем ординаты под шарнирами 1 и 2 прямолинейным отрезком.

#### Линия влияния $Q_{II}$ (рис. 4.6, з).

Строится аналогично линии влияния  $M_{II}$  с использованием графика, изображенного на рис. 3.3, в.

**Пример 3.** Для балки, изображенной на рис. 4.6, а, найти наибольшие положительные и наибольшие по абсолютной величине отрицательные изгибающие моменты и поперечные силы в сечении II от распределенной нагрузки  $q$ . При вычислении принять  $l_2 = 8$  м,  $C_1 = 2$  м,  $l_3 = 6$  м,  $a_2 = 4$  м,  $C_2 = 2$  м. Следует учесть, что нагрузка может занимать любое самое невыгодное положение, как, например, сугревая нагрузка или нагрузка от подвижных составов.

Используем построенные линии влияния —  $M_{II}$  и  $Q_{II}$  (рис. 4.6, ж, з).

Самые невыгодные, экстремальные положения нагрузки  $q$  для изгибающего момента изображены на рис. 4.7, а; знаком (+) помечено расположение нагрузки, при которой возникает наибольший положительный изгибающий момент  $\max M_{II}$ , знаком (-) — расположение, при котором возникает наибольший по абсолютной величине отрицательный изгибающий момент  $\min M_{II}$ . Экстремальные значения изгибающих моментов для сечения II равны:

$$\max M_{II} = q\omega_2 = q \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} 6 = 4q,$$

$$\min M_{II} = q(\omega_1 + \omega_3) = q \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} 10 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} 2 \right) = -q \left( \frac{10}{3} + \frac{4}{3} \right) = -4,67q.$$

Экстремальные положения нагрузки  $q$  для поперечных сил изображены на рис. 4.7, б. Экстремальные значения поперечных сил в сечении II равны:

$$\max Q_{II} = q(\omega_1 + \omega_3) = q \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} 10 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} 2 \right) = q \left( \frac{5}{3} + \frac{1}{3} \right) = 2q,$$

$$\min Q_{II} = q(\omega_2 + \omega_4) = q \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} 4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} 2 \right) = -q \left( \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \right) = -1,67q.$$

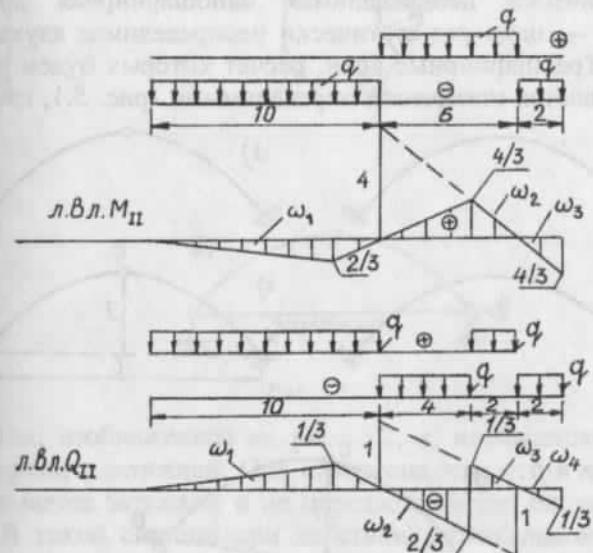


Рис. 4.7

## 5. ТРЕХШАРИРНЫЕ АРКИ

### 5.1. Типы арочных систем, их назначение

Аркой называется распорная система, имеющая вид кривого бруса.

К распорным относятся системы, в которых под действием вертикальной нагрузки возникают горизонтальные реакции, называемые распорами.

Впервые арочные и родственные им сводчатые конструкции стали широко применяться в строительстве в Древнем Риме. В настоящее время арки используются в качестве пролетных

строений мостов, для перекрытия большепролетных хранилищ, павильонов и т.д.

Арки разделяются на статически неопределеные и статически определимые. На рис. 5.1, а изображена три раза статически неопределенная бесшарнирная арка, на рис. 5.1, б — два раза статически неопределенная одношарнирная арка, на рис. 5.1, в — один раз статически неопределенная двухшарнирная арка. Трехшарнирные арки, расчет которых будем рассматривать, являются статически определимыми (рис. 5.1, г, д).

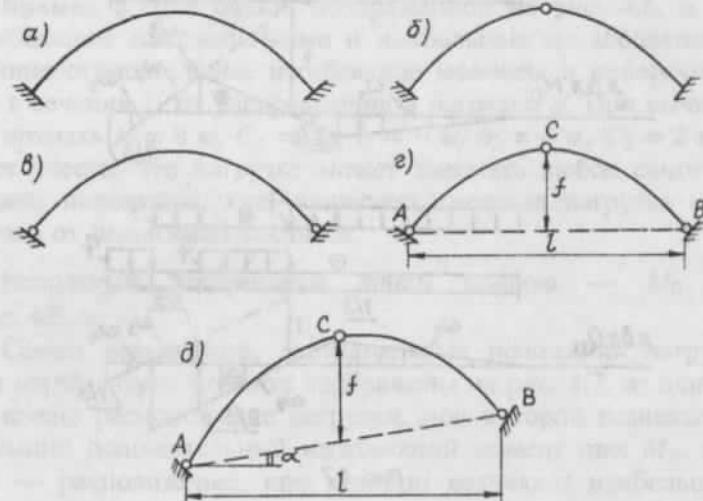


Рис. 5.1

Шарниры  $A$  и  $B$  трехшарнирной арки называют *пятыми шарнирами*, шарнир  $C$  — *ключевым*. Если опоры  $A$  и  $B$  расположены на разных уровнях, то арку называют *ползучей* (рис. 5.1, д). Расстояние по вертикали от ключевого шарнира до хорды, стягивающей пятовые шарниры, называется *стрелой подъема* и обозначается обычно буквой  $f$ . Расстояние по горизонтали между опорами  $A$  и  $B$  называется *пролетом арки*.

К арочным относятся также распорные системы не с криволинейной, а с ломаной осью. Арочная система, состоящая из двух брусьев с ломаной осью, называется *трехшарнирной рамой* (рис. 5.2, а). В строительной практике используются арки,

образованные из двух ферм, соединенных между собой ключевым шарниром. Такие системы называются *трехшарнирными фермами* (рис. 5.2, б).

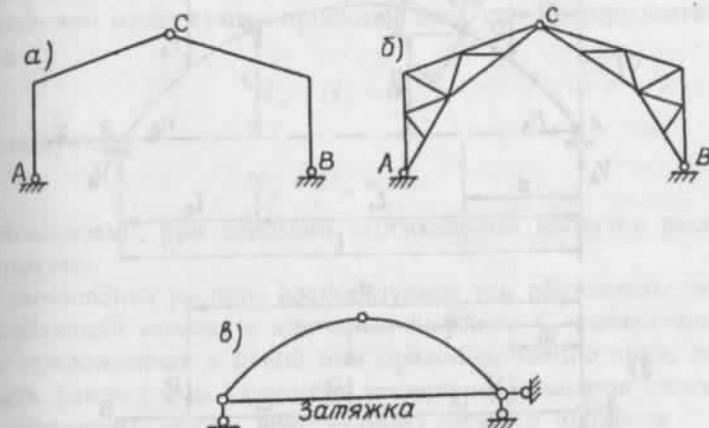


Рис. 5.2

Система, изложенная на рис. 5.2, в, называется *трехшарнирной аркой с затяжкой*. Она интересна тем, что в ней распор воспринимается затяжкой и не передается через опоры на фундамент. В такой системе при действии вертикальной нагрузки возникают только вертикальные реакции.

## 5.2. Определение опорных реакций в трехшарнирной арке

Рассмотрим арку с пятами на одном уровне, загруженную вертикальными сосредоточенными силами (рис. 5.3, а). В опорах арки возникают четыре реакции — две вертикальные  $V_A$  и  $V_B$  и две горизонтальные (распоры)  $H_A$  и  $H_B$ .

Приравняв нулю сумму моментов всех сил относительно опоры  $B$ :

$$V_A \cdot l - P_1(l - a_1) - P_2(l - a_2) - P_3(l - a_3) = 0$$

и получим:

$$V_A = \frac{1}{l} [P_1(l - a_1) + P_2(l - a_2) + P_3(l - a_3)]. \quad (5.1)$$

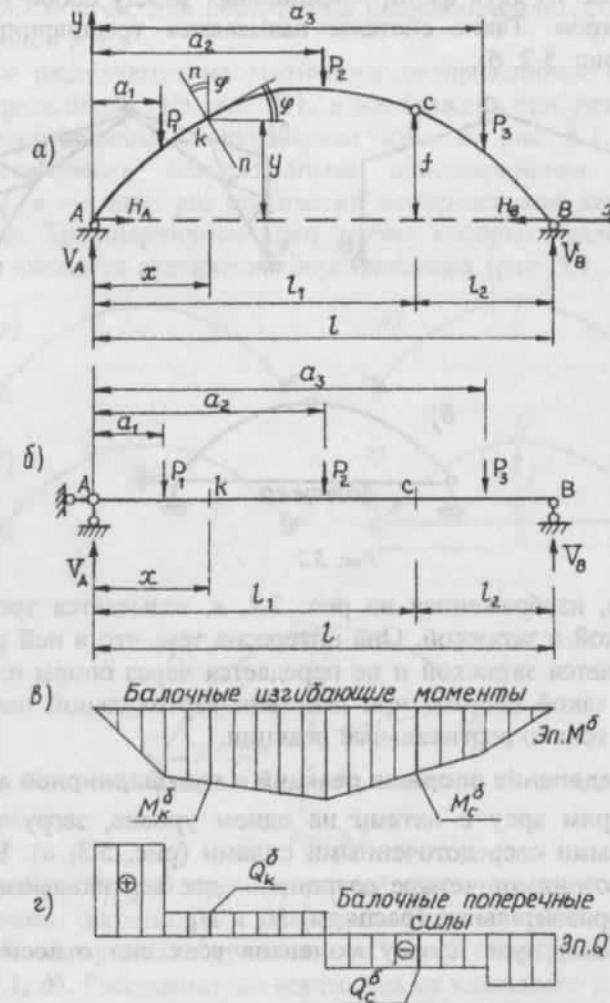


Рис. 5.3

Сопоставим арку с балкой такого же пролета и под действием такой же нагрузки (рис. 5.3, б). Реакция  $V_A$  в левой опоре балки выражается такой же формулой, что и (5.1). Следовательно, вертикальные реакции в арке, находящейся под дей-

ствием вертикальной нагрузки, равны вертикальным реакциям в заменяющей балке.

Установим соотношение между распорами  $H_A$  и  $H_B$ . Для этого приравняем нулю сумму проекций всех сил на горизонтальную ось  $X$ :

$$H_A - H_B = 0,$$

откуда получим:

$$H_A = H_B = H.$$

Следовательно, при действии вертикальной нагрузки распоры одинаковы.

Для вычисления распора воспользуемся тем обстоятельством, что изгибающий момент включает в ключевом шарнире  $C$ , вычисленный от сил, приложенных к левой или правой половине арки, должен быть равен нулю. Запишем уравнение моментов относительно шарнира  $C$  от сил, действующих слева от шарнира:

$$H_A f - V_A l_1 + P_1(l_1 - a_1) + P_2(l_1 - a_2) = 0$$

и получим формулу распора:

$$H_A = H = \frac{1}{f} [V_A l_1 - P_1(l_1 - a_1) - P_2(l_1 - a_2)]. \quad (5.2)$$

Выражение в квадратных скобках правой части формулы есть изгибающий момент в сечении  $C$  заменяющей балки, поэтому формулу (5.2) можно записать так:

$$H = \frac{M_c^\delta}{f}, \quad (5.3)$$

где  $M_c^\delta = V_A l_1 - P_1(l_1 - a_1) - P_2(l_1 - a_2)$  — балочный момент в сечении  $C$ . Эпюра балочных изгибающих моментов показана на рис. 5.3, в.

Отметим, что балочный момент  $M_c^\delta$  можно вычислить и от действия правых сил:  $M_c^\delta = V_B l_2 - P_3(a_3 - l_1)$ .

Из формулы (5.3) следует, что распор тем меньше, чем больше стрела подъема (при постоянном пролете арки).

Опоры арок необходимо рассчитывать на действие распора. Если арки опираются на стены сооружения, то распор от арок будет передаваться на стены и стремится их опрокинуть. В таком случае необходимо предусмотреть специальные устройства, воспринимающие распор. Обычно для этих целей используются затяжки или контрфорсы.

### 5.3. Вычисление внутренних усилий в трехшарнирной арке

Изгибающий момент в сечении  $k$  арки с абсциссой  $x$  и ординатой  $y$  выражим через внешние силы и реакции, приложенные к левой части арки (рис. 5.3, а):

$$M_k = V_A x - P_1(x - a_1) - H y. \quad (5.4)$$

Первые два слагаемых представляют собой изгибающий момент в заменяющей балке в сечении  $k$  с абсциссой  $x$ ; обозначим его через  $M_k^0$  и перепишем формулу (5.4) в виде:

$$M_k = M_k^0 - H y, \quad (5.5)$$

где  $M_k^0 = V_A x - P_1(x - a_1)$  — балочный момент в сечении  $k$  с абсциссой  $x$  (рис. 5.3, в).

Из формулы (5.5) следует, что изгибающие моменты в арке меньше изгибающих моментов в балке того же пролета под той же нагрузкой.

Проведем касательную к оси арки в сечении  $k$  и нормаль. Обозначим через  $\varphi$  угол между касательной и осью  $x$ . Такой же угол будет между нормалью к оси арки и вертикальной осью  $y$  (рис. 5.3, а).

Поперечную силу в сечении  $k$  найдем, спроектировав на нормаль к оси все силы, приложенные к левой части арки:

$$\begin{aligned} Q_k &= V_A \cos \varphi - P_1 \cos \varphi - H \sin \varphi = \\ &= (V_A - P_1) \cos \varphi - H \sin \varphi \end{aligned} \quad (5.6)$$

В этой формуле выражение в круглых скобках есть поперечная сила в заменяющей балке в сечении  $k$  с абсциссой  $x$ , поэтому формулу (5.6) можно записать так:

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi - H \sin \varphi, \quad (5.7)$$

где  $Q_k^0 = V_A - P_1$  — балочная поперечная сила. Эпюра балочных поперечных сил показана на рис. 5.3, г.

Формула (5.7) показывает, что поперечные силы в арке меньше, чем в заменяющей балке.

Спроектируем силы, расположенные левее сечения  $k$ , на касательную к оси арки в сечении  $k$  и найдем продольную силу:

$$\begin{aligned} N_k &= -V_A \sin \varphi + P_1 \sin \varphi - H \cos \varphi = \\ &= -(V_A - P_1) \sin \varphi - H \cos \varphi = -Q_k^0 \sin \varphi - H \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Из формулы (5.8) следует, что в арке, в отличие от балки, возникают значительные по величине сжимающие продольные силы.

**Пример.** Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в арке от действия вертикальной силы  $P$  (рис. 5.4, а). Арка очерчена по параболе, уравнение которой —

$$y = \frac{4f}{l^2}(l - x)x.$$

Пролет арки  $l = 12$  м, стрела подъема  $f = 4$  м. С учетом этого  $y = x(12 - x)/9$ .

**Решение.** Из суммы моментов относительно опоры  $B$

$$\sum m_B = V_A l - P(l - a) = 0$$

находим

$$V_A = \frac{P}{l}(l - a) = \frac{P}{12}(12 - 4) = \frac{2}{3}P \approx 0,667P.$$

Из уравнения

$$\sum m_A = V_B l - Pa = 0$$

получим

$$V_B = P \frac{a}{l} = 0,333P.$$

Распор вычислим по формуле (5.3). Для этого вначале найдем

$$M_c^0 = V_B \frac{l}{2} = 2P,$$

затем

$$H = M_c^0 / f = 2P / 4 = P / 2.$$

Чтобы построить эпюры внутренних усилий, необходимо вычислить значения усилий в ряде сечений арки. Наметим сечения через 2 м по длине пролета и пронумеруем их от 1 до 7. Определим ординаты каждого сечения. Для этого подставим в уравнение оси арки абсциссы намеченных сечений ( $x = 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12$ ) и получим:

$$y_1 = 0; \quad y_2 = \frac{1}{9}(12 - 2) = 2,222 \text{ м}; \quad y_3 = (12 - 4)/9 = 3,555 \text{ м};$$

$$y_4 = f = 4 \text{ м}; \quad y_5 = y_3 = 3,555 \text{ м}; \quad y_6 = y_2 = 2,222 \text{ м}; \quad y_7 = 0.$$

Для каждого из намеченных сечений вычислим  $\cos\varphi$  и  $\sin\varphi$  по формулам:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\varphi}}, \quad \sin\varphi = \tan\varphi \cdot \cos\varphi,$$

в которых тангенс найдем как первую производную от уравнения оси арки:

$$\tan\varphi = y' = 2(6 - x)/9.$$

Для сечения 1, при  $x = 0$ :  $\tan\varphi_1 = 2 \cdot 6/9 = 12/9 = 1,333$ ;

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + 1,333^2}} = 0,6; \quad \sin\varphi_1 = 1,333 \cdot 0,6 = 0,8.$$

Для сечения 2, при  $x = 2$ :  $\tan\varphi_2 = 2 \cdot 4/9 = 8/9 = 0,8889$ ;

$$\cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,7901}} = 0,7475; \quad \sin\varphi_2 = 0,8889 \cdot 0,7475 = 0,6644.$$

Для сечения 3, при  $x = 4$ :  $\tan\varphi_3 = 2 \cdot 2/9 = 0,4449$ ;

$$\cos\varphi_3 = 0,9138; \quad \sin\varphi_3 = 0,4061.$$

Для сечения 4, при  $x = 6$ :  $\tan\varphi_4 = 0$ ;  $\cos\varphi_4 = 1$ ;  $\sin\varphi_4 = 0$ .

Далее, из соображений симметрии и нечетности синуса, можно записать:

$$\cos\varphi_5 = 0,9138; \quad \sin\varphi_5 = -0,4061;$$

$$\cos\varphi_6 = 0,7475; \quad \sin\varphi_6 = -0,6644;$$

$$\cos\varphi_7 = 0,6; \quad \sin\varphi_7 = -0,8.$$

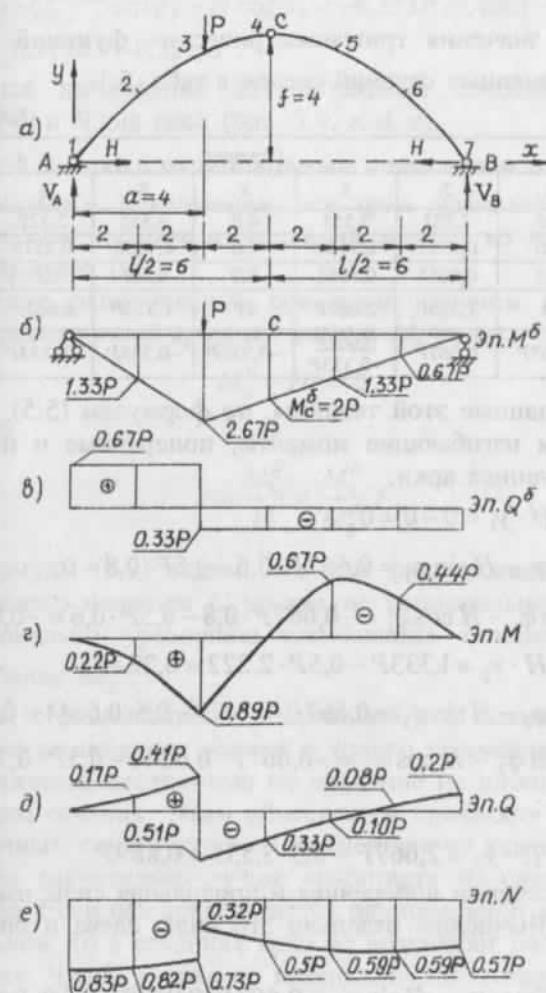


Рис. 5.4

Для вычисления усилий в арке необходимо иметь эпюры балочных изгибающих моментов  $M_k^{\delta}$  и балочных поперечных сил  $Q_k^{\delta}$  (рис. 5.4, б, в). Значения ординат с этих эпюр, ординаты

сечений  $y_k$  и значения тригонометрических функций  $\cos\varphi_k$ ,  $\sin\varphi_k$  для намеченных сечений сведем в табл. 5.1

Таблица 5.1

Параметры	Сечения						
	1	2	3	4	5	6	7
$y_k$	0,0	2,222	3,555	4,0	3,555	2,222	0,0
$\cos\varphi_k$	0,6	0,7575	0,9138	1,0	0,9138	0,7575	0,6
$\sin\varphi_k$	0,8	0,6655	0,5061	0,0	-0,5061	-0,6655	-0,8
$M_k^{\bar{a}}$	0	1,333P	2,667P	2P	1,333P	0,667P	0,0
$Q_k^{\bar{a}}$	0,667P	0,667P	0,667P -0,333P	-0,333P	-0,333P	-0,333P	-0,333P

Используя данные этой таблицы, по формулам (5.5), (5.7) и (5.8) вычислим изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в сечениях арки:

$$M_1 = M_1^{\bar{a}} - H \cdot y_1 = 0 - 0 = 0;$$

$$Q_1 = Q_1^{\bar{a}} \cos\varphi_1 - H \sin\varphi_1 = 0,667P \cdot 0,6 - 0,5P \cdot 0,8 = 0;$$

$$N_1 = -Q_1^{\bar{a}} \sin\varphi_1 - H \cos\varphi_1 = -0,667P \cdot 0,8 - 0,5P \cdot 0,6 = -0,833P;$$

$$M_2 = M_2^{\bar{a}} - H \cdot y_2 = 1,333P - 0,5P \cdot 2,222 = 0,222P;$$

$$Q_2 = Q_2^{\bar{a}} \cos\varphi_2 - H \sin\varphi_2 = 0,667P \cdot 0,7475 - 0,5 \cdot 0,6644 = 0,1661P;$$

$$\begin{aligned} N_2 &= -Q_2^{\bar{a}} \sin\varphi_2 - H \cos\varphi_2 = -0,667P \cdot 0,6644 - 0,5P \cdot 0,7475 = \\ &= -0,8167P; \end{aligned}$$

$$M_3 = M_3^{\bar{a}} - H \cdot y_3 = 2,667P - 0,5 \cdot 3,555 = 0,889P.$$

В третьем сечении поперечная и продольная силы изменяются скачками. Вычислим отдельно эти силы слева и справа от сечения:

$$\begin{aligned} Q_3^{\text{лев}} &= Q_3^{\bar{a}, \text{лев}} \cos\varphi_3 - H \sin\varphi_3 = 0,667P \cdot 0,9138 - 0,5P \cdot 0,4061 = \\ &= 0,4062P; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_3^{\text{прав}} &= Q_3^{\bar{a}, \text{прав}} \cos\varphi_3 - H \sin\varphi_3 = -0,333P \cdot 0,9138 - \\ &- 0,5P \cdot 0,4061 = -0,5076P; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_3^{\text{лев}} &= Q_3^{\bar{a}, \text{лев}} \sin\varphi_3 - H \cos\varphi_3 = -0,667P \cdot 0,4061 - \\ &- 0,5P \cdot 0,9138 = -0,7276P; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_3^{\text{прав}} &= -Q_3^{\bar{a}, \text{прав}} \sin\varphi_3 - H \cos\varphi_3 = -0,333P \cdot 0,4061 - \\ &- 0,5P \cdot 0,9138 = -0,3215P. \end{aligned}$$

Проделав вычисления для остальных сечений, построим эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  для арки (рис. 5.4, г, д, е).

### 5.5. Арки с рациональным очертанием оси

Рациональным очертанием оси арки называется такое ее очертание, при котором изгибающий момент во всех сечениях арки равен нулю.

Уравнение рациональной оси арки получим из формулы (5.5), приравняв в ней арочный момент  $M_k$  нулю:

$$M_k^{\bar{a}} - Hy = 0,$$

после чего

$$y = \frac{M_k^{\bar{a}}}{H} = \frac{M_k^{\bar{a}}}{M_c^{\bar{a}}} f. \quad (5.9)$$

Из формулы (5.9) видим, что при фиксированном положении ключевого шарнира  $C$  уравнение рациональной оси будет пропорционально уравнению изгибающих моментов в замещающей балке  $M_k^{\bar{a}}$ .

В арках с рациональным очертанием оси возникают только продольные сжимающие усилия и только сжимающие нормальные напряжения, постоянные по величине на площади каждого поперечного сечения. Этим объясняется прочность и долговечность арочных конструкций, выполненных из камня. Известно, что камень значительно лучше «работает» на сжатие, чем на растяжение. Если ось арки является рациональной или близка к рациональной, то в сечениях арки не возникают растягивающие напряжения. Чтобы в арке не возникали растягивающие напряжения, ось арки может и не совпадать в точности с рациональной. Ось должна иметь такое очертание, при котором равнодействующая нормальных напряжений в каждом сечении не выходит за пределы ядра сечения. Иначе говоря, необходимо, чтобы в крайнем волокне, в котором изгибающий момент вызывает растяжение, суммарные нормальные напряжения, вызывающие

мые действием момента и продольной силы, обращались бы в ноль.

**Пример.** Предположим, что на трехшарнирную арку будет передаваться равномерно распределенная по длине пролета нагрузка  $q$ . Требуется найти уравнение рациональной оси арки при условии, что стрела подъема  $f$  и пролет арки  $l$  заданы, пяты арки расположены на одном уровне, ключевой шарнир расположен посередине.

**Решение.** Для решения задачи используем формулу (5.9). Для данного случая уравнение изгибающего балочного момента имеет вид:

$$M_k^6 = \frac{q l}{2} x - q x \frac{x}{2} = \frac{qx}{2}(l-x).$$

Балочный момент в сечении С получим, подставив в эту формулу  $x = 12$ :

$$M_c^{\phi} = \frac{ql^2}{8}.$$

## Следовательно:

$$y = \frac{M_k^6}{M_c^6} f = \frac{\frac{qx}{2}(l-x)}{\frac{ql^2}{8}} f = \frac{4f}{l^2} x(l-x).$$

Рациональной в данном случае является арка с осью, очерченной по квадратной параболе.

### 5.5. Расчет трехшарнирных арок на подвижную нагрузку

В действительности езда непосредственно по арке обычно не совершается; нагрузка с проезжей части, с продольных балок на арку передается в узлах или через систему стоек (рис. 5.5, а) или подвесок (рис. 5.5, б). Штриховой линией на рис. 5.5 обозначена проезжая часть.

При построении линий влияния передаточные устройства в расчет принимать не будем; будем считать, что подвижный груз  $P = 1$  перемещается непосредственно по арке. Влияние же передаточных устройств всегда можно учесть, используя правило

построения линий влияния при узловой передаче нагрузки (п. 3.4).

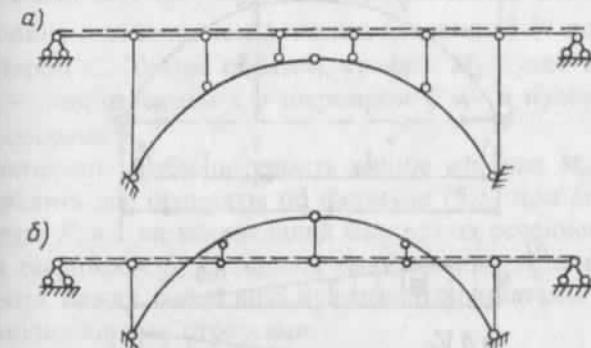


FIG. 5.5

### *Линии влияния опорных реакций.*

Зафиксируем груз  $P = 1$  на расстоянии  $x$  от левой опоры (рис. 5.6, а) и составим уравнения моментов относительно пятового шарнира  $B$  правой опоры и пятового шарнира  $A$  левой опоры:

$$\sum m_B = V_A l - 1(l - x) = 0, \quad \sum m_A = V_B l - 1 \cdot x = 0.$$

Из этих уравнений находим:

$$V_A = \frac{l-x}{l}, \quad V_B = \frac{x}{l}, \quad (0 \leq x \leq l).$$

Следовательно, линии влияния  $V_A$  и  $V_B$  вертикальных реакций совпадают с линиями влияния опорных реакций в простой однопролетной шарнирной балке: они изображены на рис. 5.6, б, в.

Распор  $H$  (горизонтальная составляющая полной опорной реакции) определяется уравнением (5.3):

$$H = M_{\odot}^6/f.$$

Это уравнение справедливо и при действии подвижной единичной нагрузки  $P = 1$ , следовательно:

$$\text{линия влияния } H = \text{линия влияния } M_c^6 / f. \quad (5.10)$$

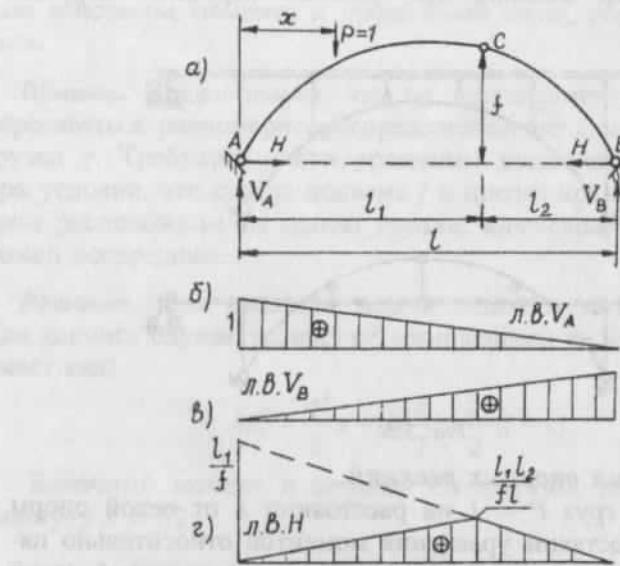


Рис. 5.6

Линия влияния распора  $H$  имеет такой же треугольный вид, что и линия влияния балочного изгибающего момента  $M_c^0$ , все ординаты которой уменьшены в  $f$  раз; она изображена на рис. 5.6, г.

#### Линия влияния изгибающего момента.

Формула (5.5) изгибающего момента в арке для произвольного сечения при действии неподвижной нагрузки остается справедливой и при действии подвижной нагрузки, если под сечением  $k$  понимать фиксированное сечение. Поэтому можно записать:

$$\begin{aligned} \text{линия влияния } M_k &= \text{линия влияния } M_c^0 - \\ &- \text{линия влияния } H y_k. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Из уравнения (5.11) видно, что линия влияния  $M_k$  представляет собой разницу двух графиков — линии влияния  $M_c^0$  и линии влияния  $H$ , все ординаты которой умножены на  $y_k$ , где  $y_k$

— ордината фиксированного сечения  $k$  арки. Каждый из этих графиков имеет вид треугольника, причем линия влияния  $M_c^0$  имеет вершину под сечением  $k$ , линия влияния  $H$  — под ключевым шарниром  $C$ . Таким образом, график  $M_k$  будет иметь две вершины — под сечением  $k$  и шарниром  $C$  — и нулевые ординаты под опорами.

Следовательно, чтобы построить линию влияния  $M_k$ , необходимо вычислить две ординаты по формуле (5.5) при двух положениях груза  $P = 1$  на заменяющей балке: под сечением  $k$  и под ключевым шарниром  $C$ . Вершины вычисленных ординат следует соединить между собой и с нулевыми ординатами под опорами прямолинейными отрезками.

#### Линия влияния поперечной силы.

Используя формулу (5.7), можем записать:

$$\begin{aligned} \text{линия влияния } Q_k &= \text{линия влияния } Q_c^0 \cos \varphi_k - \\ &- \text{линия влияния } H \sin \varphi_k, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где  $\varphi_k$  — угол наклона касательной к оси арки в сечении  $k$ .

Из формулы (5.12) можно заключить, что линия влияния  $Q_k$  имеет скачок под сечением  $k$ , так как скачком изменяется линия влияния  $Q_c^0$ , и имеет вершину под ключевым шарниром  $C$ , где вершину имеет линия влияния  $H$ . Следовательно, чтобы построить линию влияния  $Q_k$ , необходимо вычислить ординаты для трех положений подвижного груза  $P = 1$  на заменяющей балке: чуть левее и чуть правее сечения  $k$  и под ключевым шарниром  $C$ .

Вычисленные ординаты соединить между собой и с нулевыми ординатами под опорами.

#### Линия влияния продольной силы.

Из формулы (5.8) следует, что

$$\begin{aligned} \text{линия влияния } N_k &= -\text{линия влияния } Q_c^0 \sin \varphi - \\ &- \text{линия влияния } H \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Чтобы построить линию влияния  $N_k$ , необходимо вычислить три ординаты при трех положениях груза  $P = 1$  на балке: чуть

левее и чуть правее сечения  $k$  и под ключевым шарниром С. Линия влияния  $N_k$  будет иметь скачок под сечением  $k$ .

**Пример.** В арке, изображенной на рис. 5.7, а, найти опорные реакции и внутренние усилия в сечении  $k$  от заданной нагрузки без использования линий влияния и с использованием линий влияния и сравнить результаты расчета.

$$\text{Уравнение оси арки: } y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x, \quad l = 24 \text{ м}, f = 9 \text{ м}.$$

Вначале проведем расчет без использования линий влияния.

**Опорные реакции.** Вертикальные опорные реакции в арке вычисляются так же, как в заменяющей двухопорной шарнирной балке (рис. 5.7, б). Найдем эти реакции. Запишем уравнения моментов относительно опор  $B$  и  $A$ :

$$\sum m_B = q \frac{l}{2} \cdot \frac{3l}{4} - V_A l = 0, \quad \sum m_A = q \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - V_B l = 0,$$

откуда определим:

$$V_A = \frac{3}{8}ql = 9q, \quad V_B = \frac{ql}{8} = 3q.$$

Распор  $H$  найдем по формуле (5.3). Сначала вычислим балочный изгибающий момент в сечении С:

$$M_c^{\delta} = V_A \frac{l}{2} - q \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{3}{8}ql \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{16} = 36q,$$

после чего найдем  $H = M_c^{\delta} / f = ql^2 / 16f = 4q$ .

#### Внутренние усилия в сечении $k$ .

Изгибающий момент вычисляем по формуле (5.5), которую запишем так:

$$M_k = M_k^{\delta} - Hy_k. \quad (5.14)$$

Находим балочный момент в сечении  $k$ :

$$M_k^{\delta} = V_B \frac{l}{4} = 3q \frac{l}{4} = \frac{3}{4}ql = 18q.$$

Из уравнения оси арки при  $x = 3l/4$  имеем:

$$y_k = \frac{4f}{l^2} \left( l - \frac{3}{4}l \right) \frac{3}{4}l = \frac{3}{4}f = 6.75 \text{ м.}$$

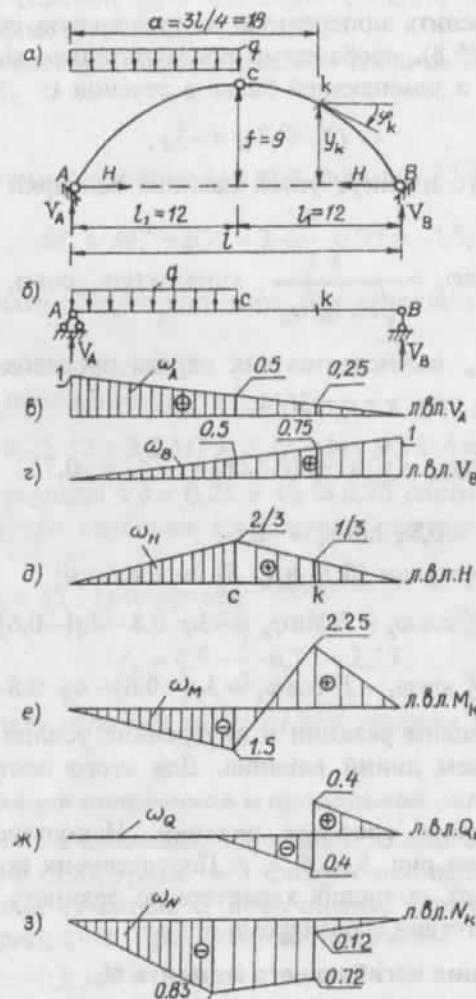


Рис. 5.7

Подставим  $M_k^{\delta}$ ,  $H$ ,  $y_k$  в формулу (5.14) и получим:

$$M_k = 18q - 4q \cdot 6.75 = -9q.$$

Чтобы вычислить поперечную и продольную силы по формулам (5.7) и (5.8), необходимо предварительно вычислить поперечную силу в заменяющей балке в сечении  $k$ :

$$Q_k^0 = -V_B = -3q,$$

а также косинус и синус углов наклона оси арки в сечении  $k$  по формулам:

$$\cos \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_k}}, \quad \sin \varphi_k = \tan \varphi_k \cdot \cos \varphi_k,$$

в которых  $\tan \varphi_k$  вычисляется как первая производная от уравнения оси арки при  $x = a = 3l/4$ :

$$\tan \varphi_k = y' = \frac{4f}{l^2} (l - 2x) = -\frac{2f}{l} = -0,75.$$

Тогда  $\cos \varphi_k = 0,8$ ,  $\sin \varphi_k = -0,6$ .

Затем по формулам (5.7) и (5.8) определяем:

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k = -3q \cdot 0,8 - 4q(-0,6) = 0,$$

$$N_k = -Q_k^0 \sin \varphi_k - H \cos \varphi_k = 3q(-0,6) - 4q \cdot 0,8 = -5q.$$

Теперь вычислим реакции и внутренние усилия в сечении  $k$  с использованием линий влияния. Для этого построим линии влияния.

**Линии влияния опорных реакций.** Используем графики, изображенные на рис. 5.6, б, в, г. Перенесем их под нашу арку (рис. 5.7, в, г, д), вычислив характерную ординату линии влияния  $H$  в соответствии с размерами арки.

#### Линия влияния изгибающего момента $M_k$ .

1. Груз  $P = 1$  включем в шарнире  $C$ .

Используем формулу (5.14). Вычислим входящие в эту формулу величины. Ставим груз  $P = 1$  на заменяющую балку (рис. 5.7, б) над сечением  $C$ , вычисляем изгибающие моменты в сечениях  $C$  и  $k$  балки:

$$M_c^0 = V_B l_1 = 0,5 \cdot 12 = 6, \quad M_k^0 = V_B (l - a) = 0,5 \cdot 6 = 3.$$

Значение реакции  $V_B = 0,5$  снято с линии влияния  $V_B$  под сечением  $C$  (рис. 5.7, г).

Значение распора возьмем с линии влияния  $H$  под сечением  $C$  (рис. 5.7, д):

$$H = 2/3.$$

Подставляем полученные числа в формулу (5.14) и находим:

$$M_k = M_k^0 - Hy_k = 3 - \frac{2}{3} \cdot 6,75 = -1,5.$$

Эту ординату следует отложить под сечением  $C$  вниз от оси графика.

2. Груз  $P = 1$  в сечении  $k$ .

При этом положении груза

$$M_c^0 = V_A l_1 = 0,25 \cdot 12 = 3; \quad M_k^0 = V_B (l - a) = 0,75 \cdot 6 = 4,5; \quad H = 1/3.$$

Значения реакций  $V_A = 0,25$  и  $V_B = 0,75$  сняты с линий влияния  $V_A$  и  $V_B$  под сечением  $k$ , значение распора  $H$  — с линии влияния  $H$ .

По формуле (5.14) получаем:

$$M_k = 4,5 - \frac{1}{3} \cdot 6,75 = 2,25.$$

Эту ординату отложим вверх от оси графика под сечением  $k$  (рис. 5.7, е).

#### Линии влияния поперечной и продольной силы.

1. Груз  $P = 1$  включем в шарнире  $C$ . В соответствии с формулами (5.7) и (5.8), груз  $P = 1$  следует поставить на заменяющую балку над сечением  $C$  и вычислить поперечную силу в сечении  $k$  и распор  $H$ . Проделав это, получим:

$$Q_k^0 = -V_B = -0,5; \quad H = 2/3.$$

По формулам (5.7) и (5.8) получаем:

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k = -0,5 \cdot 0,8 - \frac{2}{3}(-0,6) = -0,4 + 0,4 = 0;$$

$$N_k = -Q_k^0 \sin \varphi_k - H \cos \varphi_k = -(-0,5) \cdot (-0,6) - \frac{2}{3}0,8 = -0,8333.$$

2. Груз  $P = 1$  в сечении  $k$  (чуть левее).

$$Q_k^{\delta} = -V_B = -0,75; H = 1/3.$$

По формулам (5.7) и (5.8) получаем:

$$Q_k = -0,75 \cdot 0,8 - \frac{1}{3}(-0,6) = -0,6 + 0,2 = -0,4;$$

$$N_k = 0,75(-0,6) - \frac{1}{3}0,8 = -0,45 - 0,2667 = -0,7167.$$

3. Груз  $P = 1$  в сечении  $k$  (чуть правее).

$$Q_k^{\delta} = -V_B + P = -0,75 + 1 = 0,25; H = 1/3 \quad (H \text{ остается без изменения}).$$

По формулам (5.7) и (5.8) находим:

$$Q_k = 0,25 \cdot 0,8 + 0,2 = 0,2 + 0,2 = 0,4;$$

$$N_k = 0,25 \cdot 0,6 - 0,2667 = -0,1167.$$

Линии влияния  $Q_k$  и  $N_k$  изображены на рис. 5.7, ж, з.

**Определение реакций и внутренних усилий в сечении  $k$  от заданной нагрузки по линиям влияния.**

Используем формулу  $S = q\omega$ , где  $\omega$  — площадь нагруженного участка линии влияния  $S$ .

Сначала найдем опорные реакции  $V_A, V_B, H$ .

$V_A = q\omega_A$ , где  $\omega_A$  — площадь участка линии влияния  $V_A$ , расположенного под нагрузкой  $q$ :

$$\omega_A = \frac{1}{2}(0,5 + 1,0)12 = 1,5 \cdot 6 = 9.$$

$V_B = q\omega_B$ , где  $\omega_B$  — площадь участка линии влияния  $V_B$ , расположенного под нагрузкой  $q$ :

$$\omega_B = \frac{1}{2}0,5 \cdot 12 = 0,5 \cdot 6 = 3,$$

$H = q\omega_H$ , где  $\omega_H = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = 4$  — площадь участка линии влияния  $H$ , расположенного под нагрузкой  $q$ .

С учетом числовых значений площадей получаем:

$V_A = 9q, V_B = 3q, H = 4q$ , что совпадает со значениями, найденными выше.

Найдем внутренние усилия в сечении  $k$  по формулам:

$$M_k = q\omega_M, Q_k = q\omega_Q, N_k = q\omega_N,$$

где  $\omega_M, \omega_Q, \omega_N$  — площади соответствующих линий влияния под нагрузкой  $q$ . Найдем эти площади:

$$\omega_M = \frac{1}{2}(-1,5) \cdot 12 = -9, \omega_Q = 0, \omega_N = -\frac{1}{2}0,8333 \cdot 12 = -5.$$

С учетом площадей имеем:  $M_k = -9q, Q_k = 0, N_k = -5q$ , что совпадает со значениями, найденными без использования линий влияния.

Площади участков линий влияния  $\omega_A, \omega_B, \omega_H, \omega_M, \omega_Q, \omega_N$ , расположенных под нагрузкой  $q$ , выделены на рис. 5.7, в, г, д, е, ж, з более плотной штриховкой.

## 6. ПЛОСКИЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ФЕРМЫ

### 6.1. Назначение и классификация ферм

Фермы как элементы строительных конструкций известны были уже в позднем Риме, однако применение нашли лишь в средние века.

Фермы, как и балки, предназначены для перекрытия пролетов. Фермы сложнее балок в изготовлении, однако они значительно экономичнее балок по расходу материала. Дело в том, что в балке нормальные напряжения изменяются по высоте поперечного сечения по линейному закону, достигая наибольших значений в крайних волокнах и обращаясь в ноль в точках нейтральной оси. По этой причине значительная часть материала балки недонапряжена и используется не полностью его возможность сопротивления. Иначе обстоит дело в фермах. Нагрузка на ферму передается только через узлы фермы, при этом в стержнях фермы возникают, главным образом, продольные усилия, растягивающие или сжимающие. Нормальные напряжения распределяются по поперечно-му сечению стержней практически равномерно. Это позволяет проектировать фермы с более полным использованием материала. Фермы легче балок при одинаковых пролетах и нагрузках, поэтому для перекрытия больших пролетов применяют именно фермы (например, в мостостроении).

С учетом сказанного можно дать такое определение фермы: системы, которые проектируются с расчетом на узловую нагрузку и несут эту нагрузку за счет растяжения (сжатия) стержней, называются фермами.

Для изготовления ферм используется сталь, железобетон, дерево.

Расстояние между осями опор фермы называется *пролетом*. Стержни, образующие контур фермы, называются *поясами*. Стержни, соединяющие пояса, образуют *решетку фермы*. Вертикальные стержни решетки называются *стойками*, наклонные — *раскосами*. Расстояние между соседними узлами пояса называется *панелью*.

Фермы различают по: 1) очертанию поясов; 2) типу решетки; 3) типу опирания; 4) назначению; 5) уровню езды.

По очертанию поясов различают фермы с параллельными поясами (рис. 6.1, а) и с полигональным очертанием поясов (рис. 6.1, б), частным случаем которых являются треугольные фермы (рис. 6.1, в).

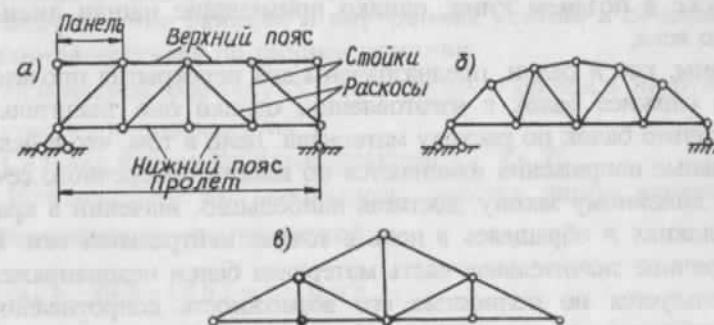


Рис. 6.1

По типу решетки фермы делятся на: фермы с *треугольной решеткой* (рис. 6.2, а), с *раскосной решеткой* (рис. 6.2, б), с *полураскосной решеткой* (рис. 6.2, в), с *ромбической решеткой* (рис. 6.2, г), *двухрешетчатые* (рис. 6.2, д) и др.

Различают следующие типы опирания ферм: *балочное* (рис. 6.3, а), *арочное* (рис. 6.3, б), *консольное* (рис. 6.3, в), *консольно-балочное* (рис. 6.3, г).

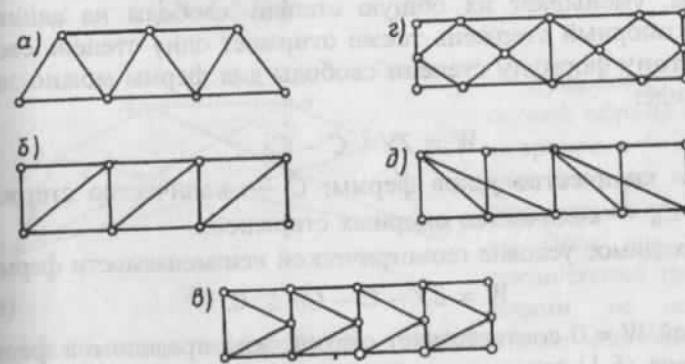


Рис. 6.2

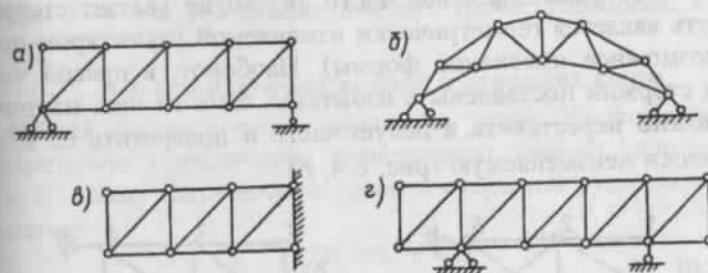


Рис. 6.3

По назначению фермы разделяют на: *стропильные* (служат для перекрытия пролетов гражданских и промышленных зданий и сооружений), *мостовые*, *крановые*, *подкрановые*, *башенные* и др.

Мостовые фермы по уровню езды делятся на фермы с ездой по верхнему поясу, на фермы с ездой по нижнему поясу и фермы с ездой посередине.

## 6.2. Исследование геометрической неизменяемости ферм. Способы образования ферм

Только геометрически неизменяемые системы используются в качестве конструкций.

Для анализа геометрической неизменяемости фермы необходимо уметь вычислять ее степень свободы. Каждый узел фермы имеет две степени свободы; каждый стержень, соединяющий

два узла, уменьшает их общую степень свободы на единицу; каждый опорный стержень также отнимает одну степень свободы. Поэтому формулу степени свободы для фермы можно записать в виде:

$$W = 2U - C - C_0,$$

где  $U$  — количество узлов фермы;  $C$  — количество стержней фермы;  $C_0$  — количество опорных стержней.

Необходимое условие геометрической неизменяемости фермы:

$$W = 2U - C - C_0 \leq 0. \quad (6.1)$$

Случай  $W = 0$  соответствует статически определимой ферме.

Условие (6.1) является необходимым, но недостаточным. Например, для системы, изображенной на рис. 6.4, а, степень свободы  $W = 0$ . Однако в левой части фермы не хватает стержня, эта часть является геометрически изменяемой (пунктиром показано возможное изменение формы). Наоборот, в правой части фермы стержни поставлены с избытком; один из них, например 2–4, можно переставить в левую часть и превратить ее в геометрически неизменяемую (рис. 6.4, б).

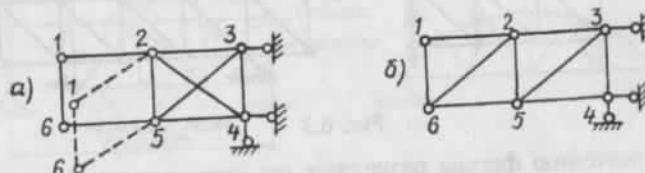


Рис. 6.4

Следовательно, при образовании шарнирно-стержневых систем необходимо соблюдать определенные правила, чтобы получить геометрически неизменяемую систему. Геометрическую неизменяемость системы можно обеспечить, если образовывать ее путем последовательного присоединения к шарнирному треугольнику узлов с помощью двух стержней (каждого следующего узла с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой).

Фермы, образованные таким способом, относятся к простейшим. Именно такие фермы изображены на рис. 6.1–6.4.

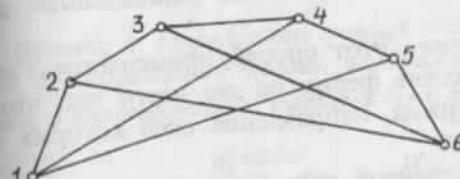


Рис. 6.5

Существует другой способ образования геометрически неизменяемых систем, когда два шарнирных треугольника (или два стержня) соединяются тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке. Фермы, образованные подобным способом, относятся к сложным. На рис. 6.5 изображена такая ферма, предложенная В.Г. Шуховым. Она образована из двух треугольников: 1–4–5 и 2–3–6, соединенных тремя стержнями: 1–2, 3–4 и 5–6.

### 6.3. Определение усилий в стержнях ферм

*Общая форма метода вырезания узлов.* Из формулы (6.1) следует, что в статически определимых фермах, для которых  $W = 0$ , между количеством узлов и стержней существует соотношение:

$$2U = C + C_0. \quad (6.2)$$

Для каждого узла плоской фермы, если его вырезать, можно составить по два независимых уравнения равновесия. Дело в том, что узел можно рассматривать как точку, на которую действует система сходящихся сил — внешних сил и осевых усилий в стержнях. Известно, что для плоской системы сил, сходящихся в одной точке, можно составить два независимых уравнения равновесия. Поэтому левая часть формулы (6.2) есть общее количество независимых уравнений равновесия, которые можно записать для всех узлов фермы. Правая часть уравнения (6.2) есть общее количество неизвестных — реакций в опорных стержнях и усилий в стержнях фермы. Таким образом, записав уравнения равновесия для всех узлов фермы, получим систему уравнений, из которой можно найти и опорные реакции, и усилия во всех стержнях фермы.

Для простейших ферм существуют приемы, позволяющие находить усилия, не записывая и не решая системы уравнений со многими неизвестными. При этом опорные реакции опреде-

ляются отдельно из уравнений равновесия, записываемых для всей фермы.

**Способ моментной точки.** Этот способ применяется в тех случаях, когда удается рассечь ферму на две части так, что в сечение попадают три стержня, направления осей которых не пересекаются в одной точке.

Составляя уравнение моментов всех сил, внешних и внутренних, действующих на отсеченную часть фермы, относительно точки пересечения двух из стержней, попавших в сечение, можно найти усилие в третьем стержне. В уравнение будет входить неизвестное усилие только этого, третьего стержня, не проходящего через названную точку.

Точка пересечения осей двух стержней, относительно которой составляется уравнение моментов, называется *моментной точкой*. При составлении уравнений равновесия неизвестные усилия в стержнях фермы предполагаются растягивающими и направляются от узлов. Если после решения уравнения какое-либо усилие получится отрицательным, значит, оно является сжимающим и в действительности направлено к узлу. Если в сечение попадает больше трех стержней, но при этом оси всех стержней, кроме одного, пересекаются в одной точке, то усилие в этом стержне можно найти из уравнения моментов относительно данной моментной точки.

**Способ проекций.** Способ проекций применяется тогда, когда два из трех стержней, попавших в сечение фермы, параллельны друг другу. Усилие в третьем стержне определяется из суммы проекций всех сил (внешних и внутренних) на нормаль к осям параллельных стержней.

**Способ последовательного вырезания узлов.** Вначале вычисляют опорные реакции. Затем определяют усилия в стержнях фермы, поочередно рассматривая равновесие узлов; начинают с узла, образованного двумя стержнями. Очередность вырезания узлов строят так, чтобы в каждом последующем узле было не более двух неизвестных усилий.

Способ прост, но имеет тот недостаток, что ошибка в определении усилия в одном стержне ведет к ошибкам в последующих стержнях.

#### 6.4. Примеры расчета ферм на неподвижную нагрузку

**Пример 1.** Определить усилия в стержнях 1-2, 2-7, 3-8, 4-9, 7-8, 8-9 консольной фермы, изображенной на рис. 6.6. Нагрузка дана в килоньютонах, размеры — в метрах.

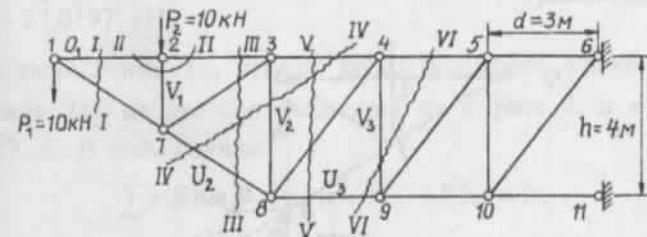


Рис. 6.6

В данном случае нет необходимости искать опорные реакции, так как усилия в стержнях можно найти из равновесия левой части фермы.

1. Усилие в стержне 1-2 следует искать из равновесия узла 1. Для этого вырежем узел 1 сечением I-I (рис. 6.7, а) и запишем сумму моментов относительно узла 7:

$$\sum m_7 = O_1 \cdot \frac{h}{2} - P_1 \cdot d = 0,$$

откуда находим:

$$O_1 = P_1 d / (h/2) = 10 \cdot 3 / 2 = 15 \text{ кН}.$$

Стержень 1-2 растянут усилием  $O_1 = 15 \text{ кН}$ .

2. Усилие  $V_1$  в стержне 2-7 проще всего найти из равновесия узла 2. Вырежем его сечением II-II, запишем сумму проекций всех сил, действующих на узел (рис. 6.7, б), на вертикальную ось:

$$\sum Y = -P_2 - V_1 = 0,$$

откуда находим  $V_1 = -P_2 = -10 \text{ кН}$ .

В стержне 2-7 действует сжимающее усилие  $V_1 = -10 \text{ кН}$ .

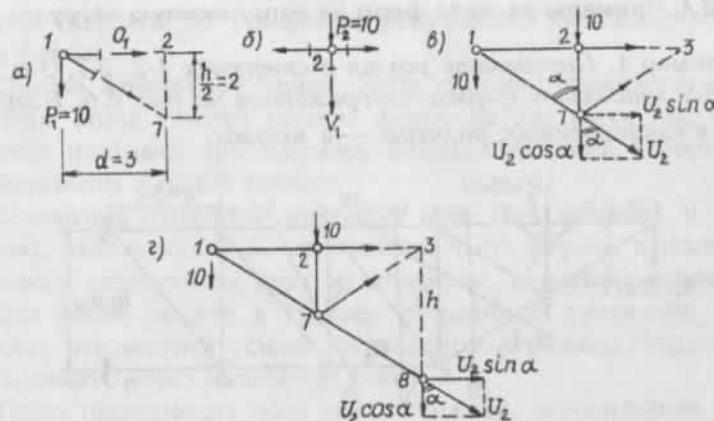


Рис. 6.7

3. Усилие  $U_2$  найдем методом моментной точки, разрезав ферму сечением III–III и рассмотрев равновесие левой отсеченной части (рис. 6.7, б). Моментной точкой является узел 3.

Чтобы не вычислять плечо силы  $U_2$  относительно точки 6, разложим  $U_2$  на вертикальную  $U_2 \cos \alpha$  и горизонтальную  $U_2 \sin \alpha$  составляющие. Плечо горизонтальной составляющей равно  $h/2 = 2$  м, плечо вертикальной составляющей равно длине панели  $d = 3$  м. Значения тригонометрических функций  $\cos \alpha$  и  $\sin \alpha$  найдем из прямоугольного треугольника 1-2-7:

$$\cos \alpha = \frac{h/2}{\sqrt{d^2 + h^2/4}} = \frac{2}{\sqrt{9+4}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = 0,5556;$$

$$\sin \alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2/4}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = 0,8322.$$

Тогда уравнение моментов относительно точки 3 запишется так:

$$\sum m_3^{\text{лев}} = U_2 \frac{h}{2} \sin \alpha + U_2 d \cos \alpha + P_2 d + P_1 2 d = 0.$$

Из этого уравнения находим:

$$U_2 = -\frac{(2dP_1 + dP_2)}{\left(\frac{h}{2} \sin \alpha + d \cos \alpha\right)} = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 10 + 3 \cdot 10}{2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha} = -\frac{90}{3,3309} = -27,0197 \text{ кН.}$$

При вычислении  $U_2$  можно было поступить иначе: разложить силу  $U_2$  на две составляющие не в узле 7, а в узле 8 (рис. 6.7, г). В этом случае

$$\sum m_8^{\text{лев}} = U_2 h \sin \alpha + P_2 d + P_1 2 d = 0,$$

откуда

$$U_2 = -\frac{P_2 d + P_1 2 d}{h \sin \alpha} = -\frac{90}{3,3288} = -27,0367 \text{ кН.}$$

4. Усилие  $V_2$  найдем методом моментной точки, разрезав ферму сечением IV–IV и записав уравнение моментов для левой отсеченной части (рис. 6.8, а) относительно моментной точки 1:

$$\sum m_1^{\text{лев}} = V_2 \cdot 2d + 10 \cdot d = 0.$$

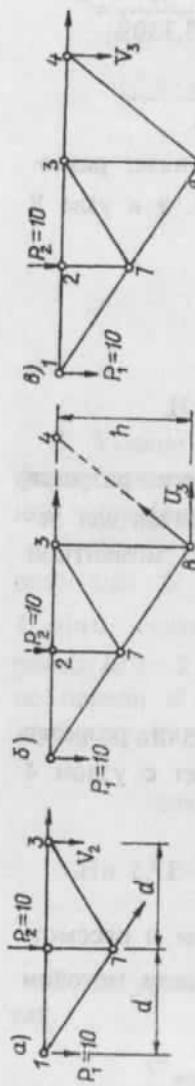
Отсюда находим:  $V_2 = -5$  кН.

5. Усилие  $U_3$  найдем методом моментной точки, разрезав ферму сечением V–V. Моментная точка совпадает с узлом 4 (рис. 6.8, б):

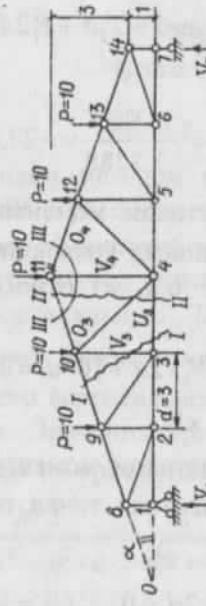
$$\sum m_4^{\text{лев}} = U_3 h + P_1 \cdot 3d + P_2 2d = 0, \quad U_3 = -\frac{150}{4} = -37,5 \text{ кН.}$$

6. Сечением VI–VI отсечем левую часть фермы и рассмотрим ее равновесие (рис. 6.8, в). Усилие  $V_3$  найдем методом проекций:

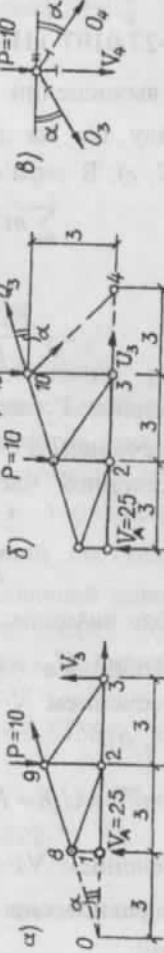
$$\sum Y = -V_3 - P_1 - P_2 = 0, \quad V_3 = -20 \text{ кН.}$$



Puc. 6,8



Price, 6.9



Pic 610

**Пример 2.** Найти усилия в стержнях 3-4, 3-10, 4-11 фермы, изображенной на рис. 6.9. Опорные реакции считать известными, они равны  $V_A = V_B = 25$  кН.

1. Усилие  $V_3$  в стержне 3–10 найдем методом моментной точки, разрезав ферму сечением I–I и рассмотрев равновесия левой отсеченной части (рис. 6.10, а). Моментной точкой является точка  $O$ , где пересекаются продолжения осей верхнего и нижнего поясов фермы.

Запишем уравнение моментов:

$$\sum m_0^{\text{rea}} = V_3 \cdot 9 - 10 \cdot 6 + 25 \cdot 3 = 0$$

и получим  $V_3 = -1,667 \text{ кН}$ .

2. Усилие  $U_3$  в стержне 3-4 найдем из равновесия левой отсеченной части, отрезанной сечением II-II (рис. 6.10, б), составив уравнение моментов относительно узла 10:

$$\sum m_{10}^{\text{лев}} = U_3 \cdot 3 + 10 \cdot 3 - 25 \cdot 6 = 0,$$

откуда имеем  $U_3 = 40 \text{ кН}$ .

3. Усилие  $V_4$  в стержне 4-11 можно найти из равновесия узла 11, вырезав его сечением III-III (рис. 6.10, б), если предварительно вычислить усилия  $O_3$  и  $O_4$  в стержнях 10-11 и 11-12.

Установим соотношение между усилиями  $O_3$  и  $O_4$ . Составим сумму проекций всех сил, действующих на узел 11, на ось  $OX$ :

$$\sum X = O_4 \cos\alpha - O_3 \cos\alpha = 0,$$

откуда получаем  $O_3 = O_4$ .

Теперь найдем  $O_3$ . Используем левую отсеченную часть (рис. 6.10, б). Запишем уравнение моментов относительно узла 4:

$$\sum m_4^{\text{res}} = O_3 \cos \alpha \cdot 3 + O_3 \sin \alpha \cdot 3 - 10 \cdot 3 - 10 \cdot 6 + 25 \cdot 9 = 0,$$

откуда находим:

$$O_3 = \frac{-135}{3(\cos\alpha + \sin\alpha)}.$$

Значения косинуса и синуса находим из геометрии фермы, рассмотрев треугольник 0-4-11 (рис. 6.9):

$$\cos \alpha = \frac{12}{\sqrt{12^2 + 4^2}} = 0,9487; \sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{12^2 + 4^2}} = 0,3162.$$

С учетом этих значений получим:

$$O_3 = -\frac{135}{3(0,9487 + 0,3162)} = -\frac{135}{3,7947} = -35,5759 \text{ кН.}$$

Теперь составим сумму проекций сил, действующих на узел 11, на ось Y:

$$\sum Y = -V_4 - 10 - O_3 \sin \alpha - O_4 \sin \alpha = 0,$$

откуда, учитывая, что  $O_3 = O_4$ , получим:

$$V_4 = -10 - 2O_3 \sin \alpha = -10 + 2 \cdot 35,5759 \cdot 0,3162 = -10 + 22,4982 = 12,4982 \text{ кН.}$$

### 6.5. Шпренгельные системы

Шпренгельные фермы чаще всего применяются в мостостроении. При увеличении высоты фермы усилия в поясах уменьшаются, что ведет к уменьшению расхода материала. Однако при увеличении высоты фермы неизбежно увеличивается длина панелей, так как углы между стойками и раскосами, поясами и раскосами должны составлять около  $45^\circ$  (по конструктивным соображениям). Увеличение длины панелей ведет к увеличению веса проезжей части моста, так как увеличиваются пролеты вспомогательных продольных балок, увеличивается расход материала на эти балки и на поперечные балки. В результате экономия материала на поясах ферм может быть сведена на нет за счет увеличения расхода материала на устройство проезжей части моста.

Задача увеличения высоты фермы без увеличения веса проезжей части решается с помощью шпренгелей — дополнительных фермочек, устанавливаемых на грузовой пояс, на котором устраивается проезжая часть. Шпренгели являются двухопорными фермочками с пролетом, равным длине панели основной фермы, опираются шпренгели на узлы основной фермы.

Шпренгели позволяют опереть поперечные балки проезжей части не только на узлы основной фермы, но и на узлы шпренгельной. В результате уменьшаются длины вспомогательных продольных балок и их сечения, уменьшается вес проезжей части моста.

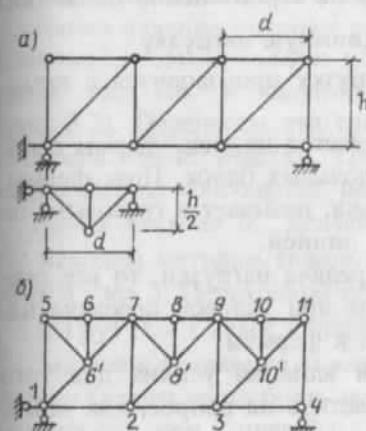


Рис. 6.11

Стержни шпренгельных ферм с одноярусными шпренгелями разделяются на три категории:

1) Стержни, принадлежащие только основной ферме. К таким стержням относятся 1-5, 1-2, 1-6', 2-7 и др. (рис. 6.11, б). Усилия в таких стержнях не зависят от наличия шпренгелей, поэтому при определении усилий в них шпренгели мысленно убирают.

2) Стержни, принадлежащие только шпренгелям (это 5-6', 6-6' и т.д.). Усилия в них возникают только от местной нагрузки на данном конкретном шпренгеле. Для определения этих усилий необходимо рассчитать шпренгель как фермочку на двух опорах на действие местной нагрузки.

3) Составные стержни, принадлежащие одновременно основной ферме и шпренгелю (стержни 5-6, 6-7, 6'-7 и др.). Усилие в составном стержне равно сумме двух усилий — уси-

лия в шпренгеле и усилия в стержне, принадлежащем только основной ферме.

лия в стержне основной фермы и усилия в шпренгельном стержне.

Кроме одноярусных применяются двухярусные шпренгели, передающие местную нагрузку из верхних узлов фермы на нижние или наоборот. Вопросы расчета ферм с двухярусными шпренгелями изложены в учебниках по строительной механике.

#### 6.6. Расчет ферм на подвижную нагрузку

Расчет ферм на подвижную нагрузку производится с помощью линий влияния.

Нагрузка с проезжей части передается на узлы фермы с помощью системы поперечных и продольных балок. Пояс фермы, на узлы которого передается нагрузка, называется грузовым; он помечается на чертежах штриховой линией.

Так как имеет место узловая передача нагрузки, то все сказанное о построении линий влияния при узловой передаче нагрузки на балку (п. 3.4) относится и к фермам.

Приступая к построению линии влияния усилия для того или иного стержня, необходимо ответить на вопрос, как найти это усилие, а именно:

а) каким образом рассечь ферму и равновесие какой отсеченной части фермы следует рассмотреть?

б) какое уравнение равновесия использовать?

Кроме того, следует отмечать, какая из панелей грузового пояса оказалась рассеченной. Как правило, при построении линий влияния рассматривается два положения неподвижного груза  $P = 1$  — левее и правее рассеченной грузовой панели. В дальнейшем эту панель будем называть переходной панелью.

Порядок построения линий влияния и определение с их помощью усилий от подвижной и неподвижной нагрузок рассмотрим на примере.

**Пример.** Для фермы, изображенной на рис. 6.12, а, необходимо:

1. Построить линии влияния опорных реакций и усилий в стержнях 13–14 ( $U_4$ ), 4–5 ( $O_4$ ), 3–14 ( $D_4$ ), 5–15 ( $D_5$ ), 7–16 ( $V_7$ ).

2. От собственного веса  $q$  найти усилие  $D_4$  с помощью линии влияния  $D_4$  и сравнить с усилием  $D_4$ , найденным без использования линии влияния.

3. От системы сосредоточенных подвижных грузов и собственного веса найти расчетные усилия в стержне 3–14 (расчетные  $\max D_4$  и расчетные  $\min D_4$ ).

Подвижная нагрузка в виде четырех сосредоточенных сил изображена под схемой фермы (рис. 6.12, а). Собственный вес считается приложенным к верхнему поясу фермы.

**Линии влияния опорных реакций.** Ферма является консольно-балочной, поэтому линии влияния опорных реакций будут такими же, как в шарнирной простой балке с консолью (рис. 3.2). Перенесем эти графики под ферму (рис. 6.12, б, в), отбросив левые участки, соответствующие левой, отсутствующей у фермы консольной части.

**Линия влияния  $U_4$ .** Делаем вертикальное сечение I–I; усилие  $U_4$  находим методом моментной точки. Моментной точкой является узел 3. Переходной панелью является панель 4–5.

1. Груз  $P = 1$  левее панели 4–5.

Запишем уравнение моментов для правой отсеченной части фермы (левую часть брать не следует, так как к ней приложено больше сил, чем к правой):

$$\sum m_3^{\text{пр}} = U_4 h - 4dV_B = 0,$$

откуда находим:

$$U_4 = \frac{4d}{h} V_B = 4V_B \quad \text{— уравнение левой ветви линии влияния } U_4.$$

Чтобы построить левую ветвь, необходимо ординаты линии влияния  $V_B$  увеличить в 4 раза (под правой опорой  $B$  отложить отрезок, равный 4) и выделить часть графика, лежащую левее узла 4.

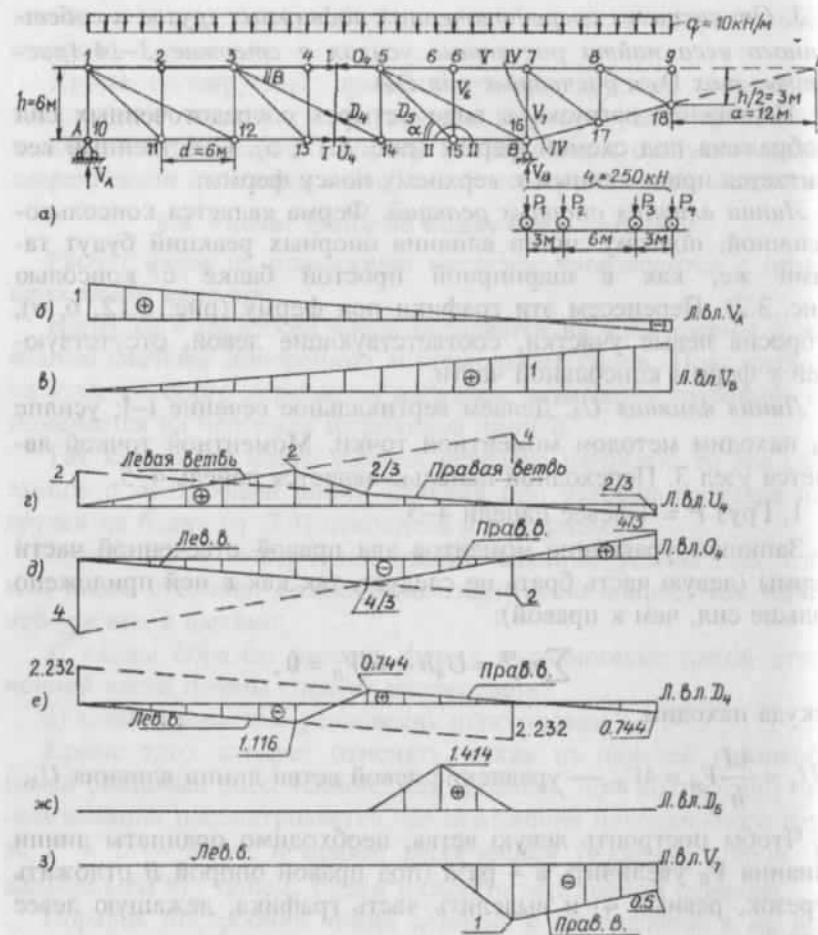
2. Груз  $P = 1$  правее панели 4–5.

Запишем уравнение моментов для левой отсеченной части:

$$\sum m_3^{\text{лев}} = U_4 h - 2dV_A = 0,$$

откуда находим:

$$U_4 = \frac{2d}{h} V_A = 2V_A \quad \text{— уравнение правой ветви линии влияния } U_4.$$



Puc. 6.12

Чтобы построить правую ветвь, необходимо ординаты линии влияния  $V_A$  увеличить в 2 раза (под опорой  $A$  отложить отрезок, равный 2) и выделить часть графика, лежащую правее узла 5.

3. Груз  $P = 1$  на переходной панели 4-5. Давление на ферму передается через передаточные узлы 4 и 5, поэтому при движении груза по панели 4-5 линия влияния изменяется по линейному закону. Соединяем прямолинейным отрезком ординаты

96

под узлами 4 и 5 и завершаем тем самым построение линии влияния  $U_4$  (рис. 6.12, г). Характерные ординаты линии влияния вычислены из простых геометрических соотношений.

Следует запомнить: продолжения левой и правой ветвей всегда пересекаются под моментной точкой. В данном случае продолжения ветвей пересекаются под узлом 3, что подтверждает правильность построения линии влияния.

Линия влияния  $O_4$ . Используем сечение I—I, применяем метод моментной точки. Моментной точкой является узел 14. Переходной является панель 4—5, как и в предыдущем случае.

1. Груз  $P = 1$  левее панели 4-5. Составим сумму моментов относительно узла 14 всех сил, приложенных к правой отсеченной части:

$$\sum m_{ij}^{op} = O_i h + V_n 2d = 0,$$

откуда находим:

$$O_4 = -\frac{2d}{h} V_B = -2V_B \text{ — уравнение левой ветви.}$$

Чтобы построить левую ветвь линии влияния  $O_4$ , необходимо все ординаты линии влияния  $V_B$  умножить на  $(-2)$  и затем выделить отрезок графика, лежащий левее узла  $4$ .

2. Груз  $P = 1$  правее панели 4-5. Запишем сумму моментов относительно узла 14 всех сил, приложенных к левой отсеченной части:

$$\sum m_{14}^{nn} = O_4 h + V_A 4d = 0,$$

откуда находим

$$O_4 = -\frac{4d}{h}V_A = -4V_A \text{ — уравнение правой ветви.}$$

Чтобы построить правую ветвь, необходимо ординаты линии влияния  $V_A$  умножить на  $(-4)$  и затем выделить отрезок, лежащий правее узла 5 (рис. 6.12,  $\delta$ ).

Линия влияния  $D_4$ . Используем сечение I-I, усилие  $D_4$  находим, используя метод проекций. Переходной является панель 4-5.

1. Груз  $P = 1$  левее панели 4–5. Составим сумму проекций всех сил, приложенных к правой части, на вертикальную ось:

$$\sum Y^{\text{пр}} = D_4 \sin \beta + V_B = 0.$$

откуда находим:

$$D_4 = -V_B / \sin \beta.$$

Значения синуса легко определяются по геометрической конфигурации и размерам фермы:  $\sin \beta = 0,448$ . Поэтому

$$D_4 = -V_B / 0,448 = -2,232V_B \quad \text{— уравнение левой ветви.}$$

2. Груз  $P = 1$  правее панели 4–5. Из уравнения равновесия левой части

$$\sum Y^{\text{лев.}} = V_A - D_4 \sin \beta = 0$$

находим:

$$D_4 = V_A / \sin \beta = 2,232V_A \quad \text{— уравнение правой ветви.}$$

Линия влияния  $D_4$  изображена на рис. 6.12, e. Левая и правая ветви параллельны; пересекаются на бесконечности, там, где лежит моментная точка.

#### Линия влияния $D_5$ .

Усилие в этом стержне сразу, используя только одно сечение, найти невозможно. Его можно найти из равновесия узла 15, выразив через усилие  $V_6$  в стойке 6–15 (рис. 6.13, a). Запишем сумму проекций на вертикальную ось всех сил, действующих на узел 15:

$$\sum Y = D_5 \sin \alpha + V_6 = 0, \text{ и получим}$$

$$D_5 = -V_6 / \sin \alpha.$$

Следовательно, линию влияния  $D_5$  необходимо выразить через линию влияния  $V_6$ . Усилие  $V_6$  находим из равновесия узла 6, для чего вырезаем узел 6 сечением III–III. При этом оказываются рассеченными две грузовые панели: 5–6 и 6–7.

1. Груз  $P = 1$  за пределами панелей 5–6 и 6–7. Из равновесия узла 6 следует (рис. 6.13, б), что  $V_6 = 0$ , а потому  $D_5 = 0$ .

Следовательно, левее узла 5 и правее узла 7 линия влияния  $D_5$  будет иметь нулевые ординаты (рис. 6.12, ж).

При движении груза  $P = 1$  по переходным панелям 5–6 и 6–7 усилие  $D_5$  будет изменяться по линейным законам. Чтобы построить график, необходимо определить еще одну недостающую ординату, поставив груз в узел 6.

2. Груз  $P = 1$  в узле 6 (рис. 6.13, в).

Из равновесия узла получаем  $V_6 = -P = -1$ , поэтому

$$D_5 = -V_6 / \sin \alpha = 1 / \sin \alpha.$$

Так как  $\alpha = 45^\circ$ , то  $D_5 = 1,414$ .

Откладываем под узлом 6 вверх полученную ординату и соединяем прямолинейными отрезками с нулевыми ординатами под узлами 5 и 7 (рис. 6.12, ж).

**Линия влияния  $V_7$ .** Делаем наклонное сечение IV–IV; усилие  $V_7$  находим методом моментной точки. Моментная точка находится справа за пределами фермы, там, где

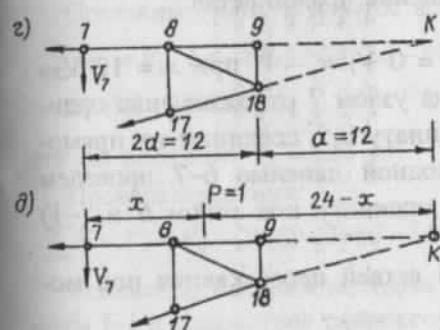


Рис. 6.13

пересекаются продолжения нижнего и верхнего поясов фермы (точка K). Расстояние a от узла 9 до моментной точки K составляет  $a = 12$  м. Переходной является панель 6–7.

1. Груз  $P = 1$  левее панели 6–7. Усилие  $V_7$  удобнее находить из равновесия правой отсеченной части (рис. 6.13, г). Запишем сумму моментов относительно точки K:

$$\sum m_K^{\text{пр}} = V_7 (2d + a) = V_7 \cdot 24 = 0,$$

откуда получаем:

$$V_7 = 0 \quad \text{— уравнение левой ветви.}$$

Левая ветвь имеет нулевые ординаты (рис. 6.12, з).

2. Груз  $P = 1$  правее панели 8–9. В данном случае усилие  $V_9$  удобнее находить тоже из равновесия правой части (рис. 6.13, д), потому что при рассмотрении равновесия левой части пришлось бы суммировать линии влияния опорных реакций, каждую со своим множителем, равным плечу реакции относительно моментной точки  $K$ . Расстояние  $x$  до подвижной силы  $P = 1$  будем измерять от узла 7.

Запишем сумму моментов сил, приложенных к правой части, относительно точки  $K$ :

$$\sum m_K^{\text{пр}} = V_7 \cdot 24 + P(24 - x) = 0, \quad (0 \leq x \leq 12),$$

откуда получаем:

$$V_7 = -\frac{24 - x}{24} \quad \text{уравнение правой ветви.}$$

Подсчитаем ординаты: при  $x = 0$   $V_7 = -1$ ; при  $x = 12$   $V_7 = -0,5$ . Строим правую ветвь: под узлом 7 отложим вниз ординату 1, под узлом 9 — вниз ординату 0,5, соединим их прямолинейным отрезком. Под переходной панелью 6–7 проведем отрезок, соединяющий нулевую ординату под узлом 6 и  $(-1)$  под узлом 7 (рис. 6.12, з).

Продолжения левой и правой ветвей пересекаются под моментной точкой  $K$ .

*Вычисление усилия  $D_4$  от собственного веса фермы с помощью линии влияния.*

Используем формулу  $D_4^q = q\omega$ , где  $\omega$  — площадь линии влияния  $D_4$ . Вычислим эту площадь, учитывая знаки ординат линии влияния:

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{1}{2} \cdot 1,116 \cdot 3d + \frac{1}{2}(0,744 - 1,116)d + \frac{1}{2}(0,744 - 0,744)4d = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 1,116 \cdot 18 + \frac{1}{2}(0,744 - 1,116)6 = -11,16. \end{aligned}$$

С учетом этого  $D_4^q = -11,16 \cdot 10 = -111,6$  кН.

*Вычисление  $D_4$  от собственного веса аналитически (без использования линии влияния).*

Собственный вес передается на узлы верхнего пояса фермы в виде сосредоточенных грузов. На каждый промежуточный узел приходится усилие  $qd = 60$  кН, на крайние узлы — по  $qd/2 = 30$  кН (рис. 6.14, а).

*Определим реакции.* Составим сумму моментов всех сил относительно опоры  $B$ :

$$\begin{aligned} \sum m_B &= V_A \cdot 6d - 30d \cdot 6d - 60 \cdot 5d - 60 \cdot 4d - 60 \cdot 3d - 60d + 60d + \\ &+ 30 \cdot 2d = 0, \end{aligned}$$

откуда получим:  $V_A = 160$  кН.

Составим сумму моментов всех сил относительно опоры  $A$ :

$$\begin{aligned} \sum m_A &= V_B \cdot 6d - 60d - 60 \cdot 2d - 60 \cdot 3d - 60 \cdot 4d - 60d \cdot 5d - 60 \cdot 6d - \\ &- 60 \cdot 7d - 30 \cdot 8d = 0, \end{aligned}$$

откуда получим:  $V_B = 320$  кН.

Проверка реакций:

$$\sum Y = V_A + V_B - 2 \cdot 30 - 7 \cdot 60 = 160 + 320 - 60 - 420 = 480 - 480 = 0.$$

Усилие  $D_4$  находим методом проекций, разрезав ферму сечением I–I и рассмотрев равновесие левой части:

$$\sum Y = V_A - 30 - 3 \cdot 60 - D_4 \sin \beta = 0,$$

$$\begin{aligned} D_4 &= \frac{1}{\sin \beta} (V_A - 30 - 180) = \frac{1}{0,448} (160 - 210) = -\frac{50}{0,448} = \\ &= -111,6 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Результаты вычисления  $D_4$  с помощью и без помощи линий влияния совпали.

*Вычисление расчетных усилий  $D_4$ .*

Расчетные усилия вычисляются по формулам:

$$\text{расч. } \min S = S^q + \min S,$$

$$\text{расч. } \max S = S^q + \max S. \quad (6.3)$$

В этих формулах  $S^q$  есть усилие от постоянной нагрузки (собственного веса  $q$ );  $\min S$  — наибольшее по абсолютной величине

личине отрицательное усилие от подвижной нагрузки ( $\min S \leq 0$ );  $\max S$  — наибольшее положительное усилие от подвижной нагрузки ( $\max S \geq 0$ ).

Если в результате вычислений окажется, что  $\min S > 0$ , то следует принять  $\min S = 0$ ; если окажется, что  $\max S < 0$ , то следует принять  $\max S = 0$ .

Отметим, что расчетное минимальное усилие может быть положительной величиной, расчетное максимальное — отрицательной.

Усилие  $D_4$  от собственного веса уже найдено:  $D_4^g = -111,6$  кН.

Найдем  $\min D_4$ . Используем критерий (3.19) для многоугольной линии влияния. При отыскании минимального усилия критерий записывается так:

$$\begin{aligned} \text{сдвиг влево } \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i &\leq 0, \\ \text{сдвиг вправо } \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i &\geq 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Тангенсы углов наклона участков линии влияния  $D_4$  вычислим из геометрических соотношений, знак тангенсу присваивается в зависимости от четверти круга, в которой находится угол:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{1,116}{3d} = -\frac{1,116}{18} = -0,062;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{0,744 - (-1,116)}{d} = \frac{1,860}{6} = 0,31;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = -\frac{0,744}{2d} = -\frac{0,744}{12} = -0,062.$$

Грузы следует расположить над отрицательным участком линии влияния, там, где большие ординаты.

Ставим грузы в первое испытываемое положение: третий груз  $P_3$  ставим над вершиной, над ординатой  $(-1,116)$ . (На рис. 6.14, б грузы изображены под линией влияния). Сдвинем грузы на малую величину влево; при этом над участком линии влияния с углом  $\alpha_1$  окажутся три груза:  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ , над участ-

ком с углом  $\alpha_2$  — один груз  $P_4$ . Вычислим в первом неравенстве (6.4) знак левой части:

$$\begin{aligned} \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i &= R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = (P_1 + P_2 + P_3) \operatorname{tg} \alpha_1 + P_4 \operatorname{tg} \alpha_2 = \\ &= 750(-0,062) + 250 \cdot 0,31 > 0. \end{aligned}$$

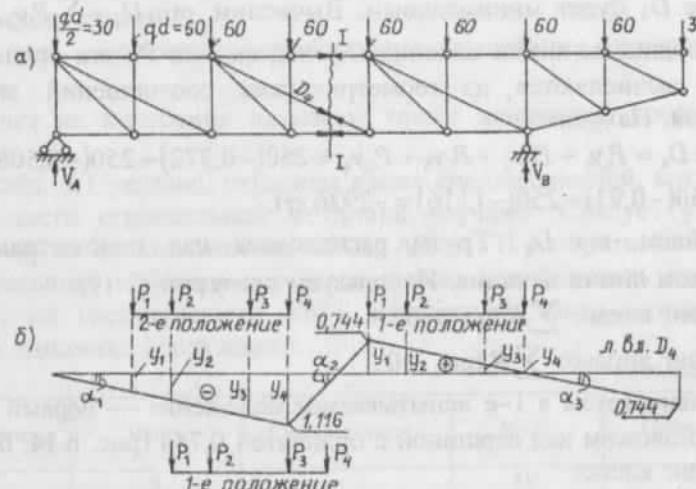


Рис. 6.14

Сдвинем грузы на малую величину вправо; при этом над участком линии влияния с углом  $\alpha_1$  окажутся два груза:  $P_1$ ,  $P_2$ , над участком с углом  $\alpha_2$  — два груза:  $P_3$  и  $P_4$ . Вычислим во втором неравенстве (6.4) знак левой части:

$$\begin{aligned} \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i &= R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = (P_1 + P_2) \operatorname{tg} \alpha_1 + (P_3 + P_4) \operatorname{tg} \alpha_2 = \\ &= 500(-0,062) + 500 \cdot 0,31 > 0. \end{aligned}$$

Смена знаков производной не произошла; следовательно, первое положение грузов не является экстремальным. Испытаем второе положение: ставим крайний правый груз  $P_4$  над вершиной с ординатой  $(-1,116)$ . Делаем вычисления:

сдвиг влево:

$$\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i = R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \operatorname{tg} \alpha_1 = 1000 \cdot (-0,062) < 0.$$

сдвиг вправо:

$$\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i = R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = (P_1 + P_2 + P_3) \operatorname{tg} \alpha_1 + P_4 \operatorname{tg} \alpha_2 = \\ = 750(-0,062) + 250 \cdot 0,31 > 0.$$

Произошла смена знака с минуса на плюс, что является признаком такого экстремального положения грузов, при котором усилие  $D_4$  будет минимальным. Вычислим  $\min D_4 = \sum P_i y_i$ , где  $y_i$  — ординаты линии влияния  $D_4$  под силами  $P_i$ ; эти ординаты легко вычисляются из геометрических соотношений линии влияния. Находим:

$$\min D_4 = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4 = 250(-0,372) + 250(-0,508) + \\ + 250(-0,93) + 250(-1,116) = -2926 \text{ кН.}$$

Найдем  $\max D_4$ . Грузы расположим над положительным участком линии влияния. Используем критерий (3.19):

Сдвиг влево:  $\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i \geq 0$ .

Сдвиг вправо:  $\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i \leq 0$ .

Ставим грузы в 1-е испытываемое положение — первый груз  $P_1$  расположим над вершиной с ординатой 0,744 (рис. 6.14, б).

Сдвиг влево:

$$\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i = R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_3 \operatorname{tg} \alpha_3 = P_1 \operatorname{tg} \alpha_2 + (P_2 + P_3 + P_4) \operatorname{tg} \alpha_3 = \\ = 250 \cdot 0,31 + 350(-0,061) > 0.$$

Сдвиг вправо:

$$\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i = R_3 \operatorname{tg} \alpha_3 = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \operatorname{tg} \alpha_3 = 1000(-0,061) < 0.$$

Произошла смена знака с плюса на минус, что является признаком такого экстремального положения грузов, при котором усилие  $D_4$  будет максимальным. Вычислим это усилие:

$$\max D_4 = \sum P_i y_i = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4 = \\ = 250 \cdot 0,744 + 250 \cdot 0,588 + 250 \cdot 0,186 + 250 \cdot 0 = 1518 \text{ кН.}$$

Найдем расчетные усилия по формулам (6.3), заменив  $S$  на  $D_4$ :

$$\text{расч. } \min D_4 = D_4^u + \min D_4 = -111,6 - 2926 = -3073,6 \text{ кН;}$$

$$\text{расч. } \max D_4 = D_4^d + \max D_4 = -111,6 + 1518 = 1406,4 \text{ кН.}$$

## 7. ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Весь курс строительной механики делится на три части:

I часть — расчет на прочность статически определимых стержневых систем;

II часть — расчет на прочность статически неопределенных стержневых систем;

III часть — расчет на устойчивость и колебания стержневых систем.

Расчет на колебания называют также динамикой сооружений.

В табл. 7.1 указано, студенты каких специальностей, когда и какие части строительной механики изучают. Следует уточнить, что на специальностях СЖД, АД и УП из третьей части строительной механики изучается только устойчивость сооружений; на специальности УМТ из третьей части изучается только динамика сооружений.

Таблица 7.1

Дисциплина	Часть	Специальность	Курс	Семестр
Строительная механика	I	МТ	IV	7
	II		IV	8
	III		V	9
	I	ПГС	IV	7
	II		IV	8
	III		V	9
	I	СЖД, АД	IV	7
	II, III		IV	8
	I	УП	III	5
	II		III	6
	III		IV	7
	I	МТУ	III	5
	II, III		III	6
	I, II	ВВ	III	6
	I, II	СУ	III	5
	I	ЭС	III	6

Перечень и количество контрольных работ и задач по первой части строительной механики для студентов различных специальностей указаны в табл. 7.2.

Таблица 2

Дисциплина	Специальность	Курс	Номера		Срок выполнения	Семестр сдачи	
			контр. работ	задач		зачета	экзамена
Строительная механика. I часть	МТ	IV	1 2	2 3; 4	октябрь ноябрь	—	VII
	ПГС	IV	1 2	2 3; 4	октябрь ноябрь	—	VII
	СЖД, АД	IV	1 2	2 3; 4	октябрь ноябрь	—	VII
	УП	III	1 2	1 2	октябрь ноябрь	—	V
	ВВ	III	1	1; 3	март	VI	—
	МТУ	III	1 2 3	2 3 4	октябрь ноябрь	—	V
	СУ	III	1	1; 4	октябрь	—	V
	ЭС	III	1 2	1 2	октябрь ноябрь	VI	—

Исходные данные для индивидуальных заданий на контрольные работы студент должен брать из приводимых далее таблиц в строгом соответствии с шифром зачетной книжки. Для этого следует записать окончание шифра (после буквенного индекса) несколько раз и под последними шестью цифрами подписать буквы: *a, b, v, g, d, e*. Тогда цифра над буквой *a* указывает, какую строку нужно взять из столбца *a*, цифра над буквой *b* — какую строку следует взять из столбца *b* и т.д. Например, при шифре 98-С-67 нужно 67 написать подряд три раза и под шестью цифрами написать буквы:

6	7	6	7	6	7
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>v</i>	<i>g</i>	<i>d</i>	<i>e</i>

При выполнении чертежей должны быть строго соблюдены масштабы. На чертежах и в тетради расчетов следует поставить свою подпись и указать даты начала и окончания выполнения работы. Нужно также указать свой учебный номер (шифр) и адрес. Страницы в тетради необходимо пронумеровать, чертежи вклеивать, исправления решений делать отдельно на чистых листах в этой же тетради.

Приступая к решению контрольной задачи на какую-либо тему, следует предварительно ознакомиться с теорией на данную тему (п.п. 1–6) и просмотреть ход решения аналогичных задач.

**Задача 1**  
**Определение внутренних усилий**  
**в статически определимой плоской раме**

Для статически определимой рамы требуется (рис. 7.1):

1. Вычертить в масштабе схему рамы с указанием численных значений размеров и нагрузок.
2. Выполнить кинематический анализ. Убедиться в геометрической неизменяемости рамы.
3. Найти опорные реакции и проверить правильность их вычисления.
4. Записать уравнения изгибающих моментов *M*, поперечных *Q* и продольных сил *N* для всех стержней рамы. Построить в масштабе эпюры *M*, *Q*, *N* с указанием численных значений характерных ординат.
5. Выполнить проверку равновесия узлов рамы.

Исходные данные взять из табл. 7.3.

Таблица 7.3

строки	схемы	Номер		<i>P</i> , кН	<i>q</i> , кН/м	<i>m</i> , кНм
		<i>l</i> , м	<i>h</i> , м			
1	1	6	3	30	8	10
2	2	5,5	3,2	35	10	12
3	3	5,0	3,4	40	12	14
4	4	4,5	3,6	45	14	16
5	5	4,2	3,8	50	15	18
6	6	4,0	4,0	55	16	20
7	7	3,8	4,2	60	18	22
8	8	3,6	4,4	65	20	24
9	9	3,4	4,6	70	22	26
0	0	3,0	4,8	75	24	28
	<i>e</i>	<i>b</i>	<i>v</i>	<i>g</i>	<i>d</i>	<i>a</i>

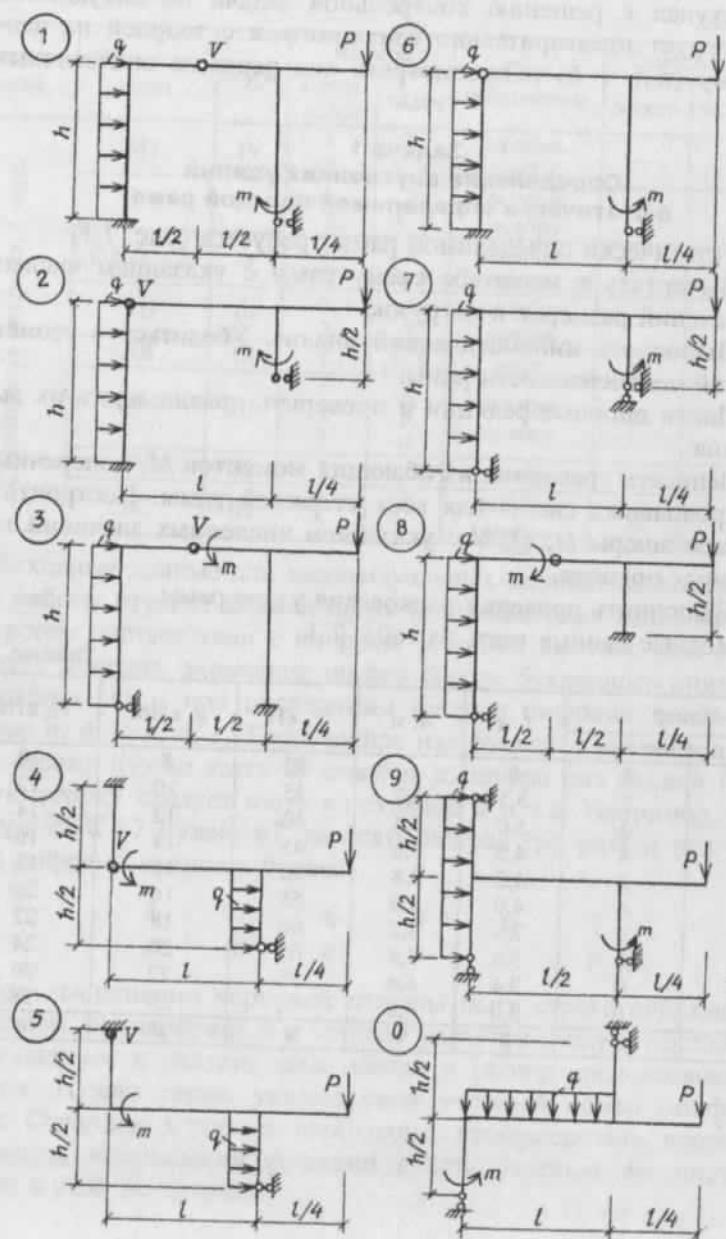


Рис. 7.1

### Задача 2 Расчет многопролетной шарнирной балки

Для многопролетной шарнирной балки (рис. 7.2) требуется:

- Вычертить в масштабе схему балки с нагрузкой и указать размеры пролетов и консолей в метрах.
- Проверить геометрическую неизменяемость балки и изобразить «этажную» схему.
- Построить эпюры  $M$  и  $Q$  для заданной балки и проверить их.
- Построить линии влияния  $M$  и  $Q$  для заданного сечения  $m$  (сечения 1–9 справа, а 10 — слева от точек деления).
- Загрузить эти линии влияния заданной нагрузкой и найти  $M$  и  $Q$  в заданном сечении. Сравнить эти значения с результатами расчетов по п. 3.
- Найти наибольшие положительные и отрицательные значения  $M$  и  $Q$  от равномерно распределенной разрывной подвижной нагрузки произвольной длины интенсивностью 10 кН/м.

Исходные данные взять из табл. 7.4.

Таблица 7.4

Номер		Длина панели $d$ , м	$P$ , кН	$q$ , кН/м	Сечение, $m$
Строки	Схемы				
1	5	3	10	2	4
2	4	4	20	4	2
3	1	3	30	3	2
4	2	4	30	4	10
5	3	3	20	2	2
6	6	4	10	3	1
7	8	3	10	2	5
8	9	4	20	4	3
9	0	3	30	2	9
0	7	4	20	3	1
e	a	a	a	a	e

#### Указания:

- Эпюры и линии влияния располагать под схемой балки.
- Если сечение  $m$  расположено над промежуточной опорой балки, то при построении линии влияния  $Q$  это сечение следует считать принадлежащим пролету (не консоли) соответствующей балки.

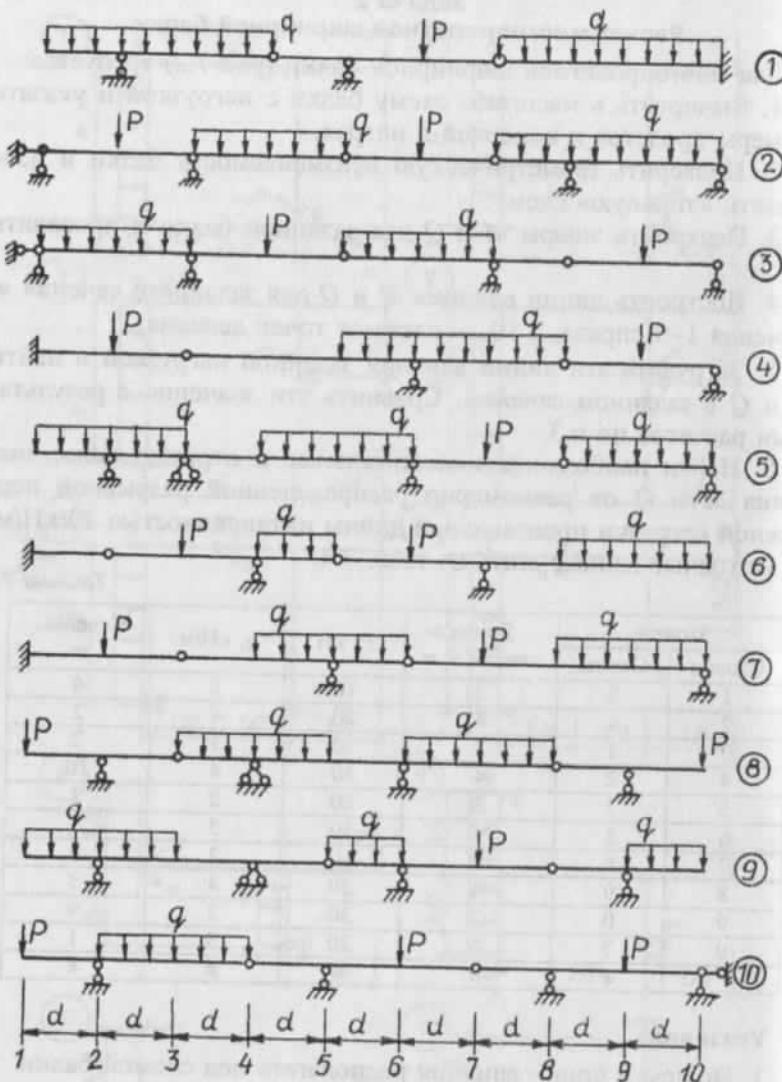


Рис. 7.2

### Задача 3 Расчет трехшарнирной арки или рамы

Для трехшарнирной арки или рамы (рис. 7.3) требуется:

- Вычертить в масштабе схему арки или рамы с нагрузкой и указанием характерных размеров в метрах.
- Определить аналитически опорные реакции, поперечную  $Q_k$  и продольную  $N_k$  силы, изгибающий момент  $M_k$  в сечении  $k$  (с абсциссой  $x_k$ ) от заданной нагрузки.
- Построить линии влияния опорных реакций, а также линии влияния изгибающего момента  $M_k$ , поперечной  $Q_k$  и продольной  $N_k$  сил в сечении  $k$ .
- Вычислить величины опорных реакций, изгибающего момента  $M_k$ , поперечной  $Q_k$  и продольной  $N_k$  сил от заданной нагрузки по линиям влияния и сравнить их с полученными в п. 1 задания.

Исходные данные взять из табл. 7.5.

Таблица 7.5

Номер строки		Пролет $l$ , м	$\frac{f}{l} = \frac{h}{l}$	$x_k$	$\alpha$ , только для рам	$q$ , кН/м	$U_1$	$U_2$
1	5	18	0,3	0,25	0,8	5	0,5	1,00
2	4	24	0,3	0,75	0,75	6	0	0,25
3	3	30	0,4	0,75	0,6	7	0	1,00
4	2	36	0,5	0,25	0,5	8	0,25	1,00
5	1	42	0,3	0,75	0,75	9	0,25	0,75
6	5	18	0,5	0,75	0,8	10	0	0,75
7	4	24	0,4	0,25	0,6	11	0,25	0,50
8	3	30	0,3	0,25	0,5	12	0,5	0,75
9	2	36	0,5	0,75	0,8	13	0	0,50
0	1	42	0,3	0,25	0,75	14	0,5	1,00
		$e$	$b$	$v$	$z$	$b$	$e$	$b$

#### Указания:

- Эпюры и линии влияния располагать под схемой конструкции.
- Ординаты точек оси арки, синусы и косинусы угла  $\phi$  на касательной к оси  $x$  следует определять в зависимости от вида схемы сооружения:

Для рамы — из геометрических соотношений.

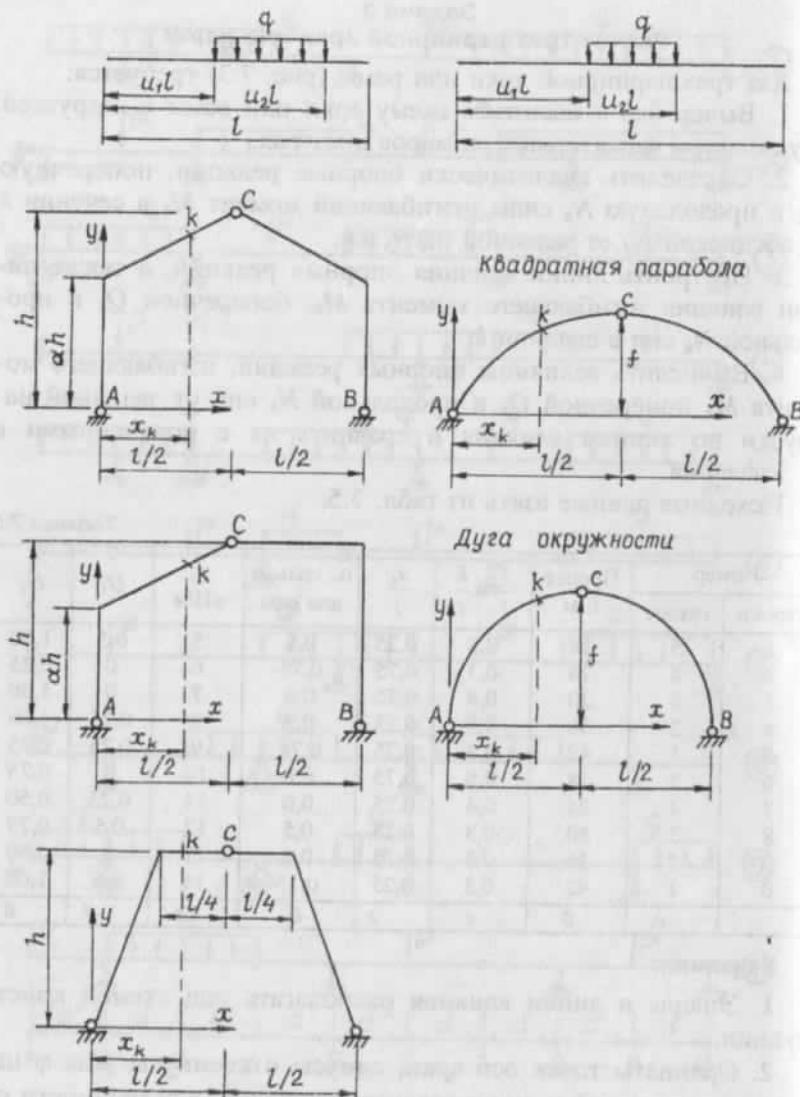


Рис. 7.3

Для параболической арки (схема 4) — по формулам:

$$y = \frac{4f}{l^2}x(l-x); \quad \operatorname{tg}\phi = y' = \frac{4f}{l^2}(l-2x),$$

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\phi}}, \quad \sin\phi = \operatorname{tg}\phi \cos\phi.$$

При очертании оси арки по окружности радиусом  $R = \frac{1}{2}f + \frac{l^2}{8f}$  (схема 5) — по формулам:

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}-x\right)^2} - R + f, \quad \sin\phi = \frac{l-2x}{2R},$$

$$\cos\phi = (y+R-f)/R.$$

#### Задача 4

Расчет фермы на постоянную и временную нагрузки

Для фермы (рис. 7.4) требуется:

1. Вычертить в масштабе схему фермы с указанием характерных размеров в метрах.

2. Построить линии влияния опорных реакций и усилий в пяти указанных в табл. 7.6 стержнях.

3. Найти усилия в указанных стержнях от собственного веса  $q$  с помощью линий влияния и проверить эти значения аналитически, вычислив усилия без использования линий влияния.

4. Для стержня с двузначной линией влияния определить расчетные значения усилий с учетом собственного веса  $q$  и подвижного экипажа, схема которого дана на рис. 7.5.

5. В одном из стержней верхнего или нижнего пояса, линия влияния которого имеет треугольный вид, определить усилие от загружения эквивалентной нагрузкой класса  $K = 10$  (табл. 7.7), (только для МТ и МТУ).

Исходные данные взять из табл. 7.6.

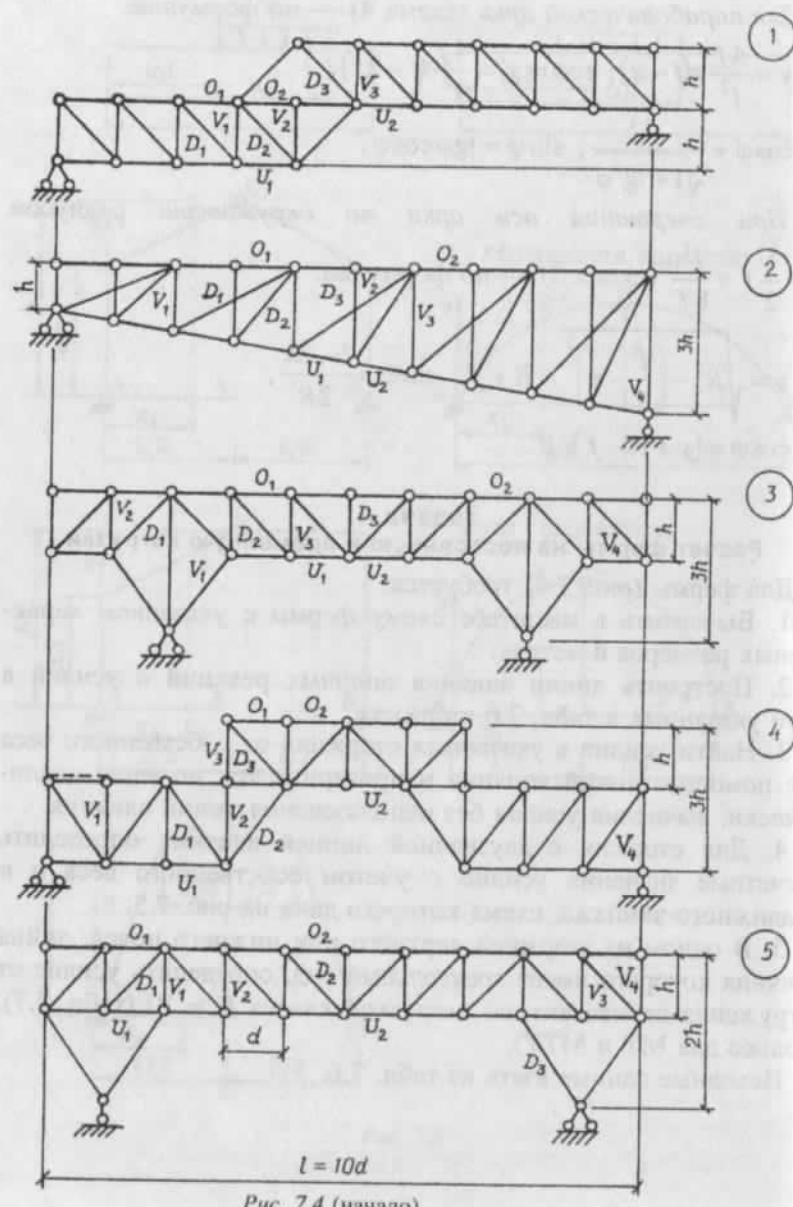


Рис. 7.4 (начало)

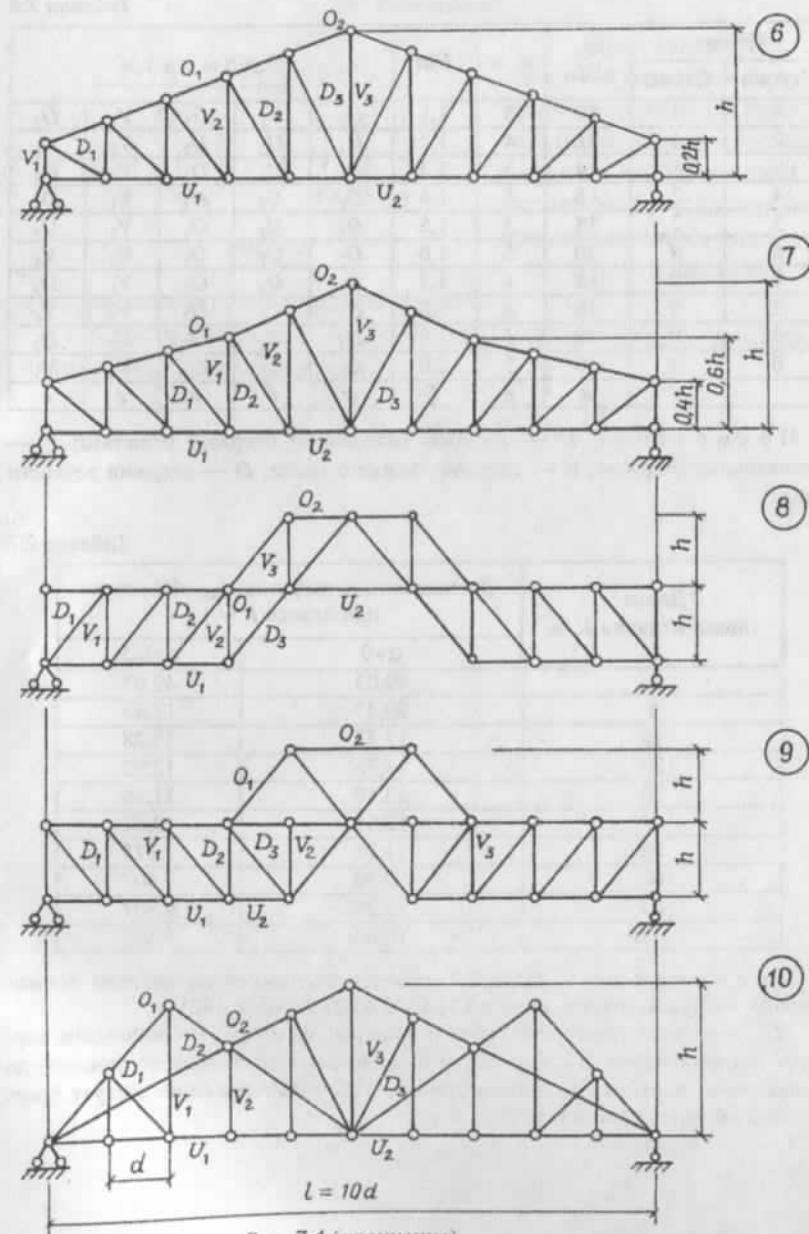


Рис. 7.4 (окончание)

Таблица 7.6

Номер		$q$ , кН/м	$d$ , м	$H/d$	Элементы				
Строки	Схемы				$D_1$	$U_1$	$O_1$	$V_1$	$D_3$
1	5	10	3	1,1	$D_1$	$U_1$	$O_1$	$V_1$	$D_3$
2	4	12	4	1,2	$D_2$	$U_2$	$O_2$	$V_2$	$V_4$
3	1	14	5	1,3	$D_1$	$U_1$	$O_1$	$V_3$	$D_1$
4	2	16	4	1,4	$D_2$	$U_2$	$O_2$	$V_1$	$D_3$
5	3	18	3	1,5	$D_1$	$U_1$	$O_1$	$V_2$	$D_3$
6	6	20	5	1,6	$D_2$	$U_2$	$O_2$	$V_3$	$V_4$
7	8	18	4	1,7	$D_1$	$U_1$	$O_1$	$V_1$	$D_3$
8	9	16	3	1,8	$D_2$	$U_2$	$O_2$	$V_2$	$V_4$
9	0	18	4	1,9	$D_1$	$U_1$	$O_1$	$V_3$	$D_3$
0	7	20	5	2,0	$D_2$	$U_2$	$O_2$	$V_1$	$V_3$
	$e$	$a$	$g$	$b$	$a$	$b$	$g$	$g$	$e$

Причесание:  $D$  — раскосы (наклонные стержни решетки);  $V$  — вертикальные стержни;  $U$  — стержни нижнего пояса;  $O$  — стержни верхнего пояса.

Таблица 7.7

Длина линии влияния $\lambda$ , м	Эквивалентная нагрузка $q_{\text{экв}}$ , кН/м при классе $K = 1$	
	$\alpha=0$	$\alpha=0,5$
1	49,03	49,03
5	20,37	17,82
10	17,47	15,28
20	14,76	12,92
30	13,10	11,46
40	12,01	10,51
50	11,29	9,875
60	10,80	9,807
80	10,26	9,807
100	10,00	9,807

Причесание: 1. Табл. 7.7 является выдержкой из таблицы эквивалентных нагрузок, приведенной в СНИП 2.05.03-84 (стр. 142).

2.  $\lambda$  — длина треугольной линии влияния, м;  $\alpha = a/\lambda$  — положение вершины линии влияния;  $a$  — проекция наименьшего расстояния от вершины до конца линии влияния, м. Промежуточные табличные значения следует брать по двойной интерполяции, т. е. по  $\lambda$  и  $\alpha$ .

## Указания:

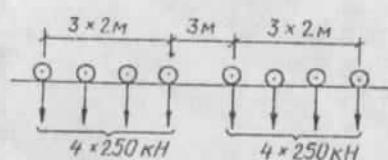


Рис. 7.5

дует располагать под схемой фермы.

3. Собственный вес  $q$  считать распределенным по всей длине фермы, по грузовому поясу.

## Содержание

Введение .....	3
1. Кинематический анализ сооружений.....	5
2. Статически определимые рамы .....	12
3. Подвижные нагрузки и теория линий влияния.....	27
4. Многопролетные статически определимые балки.....	43
5. Трехшарнирные арки.....	61
6. Плоские статически определимые фермы.....	81
7. Задания на контрольные работы .....	105

Учебное издание

Зиновьев Борис Михайлович  
Карманова Татьяна Филипповна

## ПЛОСКИЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Учебное пособие

Редактор Г.С. Желнова  
Компьютерная верстка Н.Н. Садовщикова

---

Изд. лиц. ЛР № 021277 от 06.04.98

Подписано в печать 14.11.2002

7,5 печ. л., 6,7 уч.-изд. л. Тираж 350 экз. Заказ № 991

---

Издательство Сибирского государственного университета  
путей сообщения  
630049, Новосибирск, ул. Д. Ковальчук, 191.  
Тел./факс: (383-2) 287-381. E-mail: press@stu.ru